

# IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DA $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE ROBUSTA VIA REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA EM UM SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

EMERSON R. P. DA SILVA\*, HELOISE A. FAZZOLARI†, PEDRO C. DE OLIVEIRA‡, EDVALDO ASSUNÇÃO‡, MARCELO C. M. TEIXEIRA‡, ALFREDO D. S. LORDELO†

\**UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio  
Avenida Alberto Carazzai, 1640. 86300-000  
Cornélio Procópio, PR, Brasil*

†*Universidade Federal do ABC  
CECS - Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas  
Avenida dos Estados, nº 5001, 09210-580 - São Paulo, SP, Brasil.*

‡*Faculdade de Engenharia  
UNESP - Univ Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira  
Departamento de Engenharia Elétrica, Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC)  
Avenida José Carlos Rossi, nº 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil.*

Emails: e.ravazzi@bol.com.br, helo\_fm@hotmail.com, pedro.oliveira11@hotmail.com, edvaldo@dee.feis.unesp.br, marcelo@dee.feis.unesp.br, alfredo.lordelo@ufabc.edu.br

**Abstract**— This work is focused on a practical implementation of a robust controller, designed by LMIs (Linear matrix inequalities), in an active suspension system manufactured by the Quanser®. For the implementation, it is supposed that the active suspension system is subject to a uncertainty in the model. While most works found in literature use state feedback for the control design, this work considers the state-derivative feedback. The motivation for the use of state-derivative feedback is due to its easy implementation in some mechanical applications, for example, in vibration control of mechanical systems, where accelerometers have been used to measure the system state. The results show a good performance of the control theory applied to the active suspension physical model.

**Keywords**— State-derivative feedback,  $\mathcal{D}$ -stability, linear matrix inequalities (LMIs), robust control, active suspension system with uncertainty, structural fault, practical implementation.

**Resumo**— Este trabalho objetiva a implementação prática de um controlador robusto, projetado por LMIs, em um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser®. Na implementação, é suposto que o sistema de suspensão ativa está sujeito a uma incerteza no modelo. Enquanto muitos trabalhos encontrados na literatura especializada utiliza a realimentação de estados para o projeto do controlador, este trabalho considera a realimentação da derivada do vetor de estado (realimentação derivativa). A motivação para a utilização da realimentação derivativa é devido a sua fácil implementação em algumas aplicações mecânicas, por exemplo, no controle de vibração de sistemas mecânicos, onde acelerômetros têm sido usados para medir o estado do sistema. Os resultados mostram um bom desempenho da teoria de controle aplicada ao modelo físico da suspensão ativa.

**Palavras-chave**— Realimentação derivativa,  $\mathcal{D}$ -estabilidade, desigualdades matriciais lineares (LMIs), controle robusto, sistema de suspensão ativa com incertezas, falhas estruturais, implementação prática.

## 1 Introdução

A análise de estabilidade e o projeto de controladores de sistemas lineares é uma área de pesquisa amplamente explorada. Algumas metodologias usam uma função de Lyapunov para garantir a estabilidade do sistema e o projeto é realizado utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*) (Boyd et al., 1994). A síntese de controladores baseados em LMIs tem a vantagem de permitir facilmente a inclusão de índices de desempenho na abordagem do problema. Além disso, LMIs podem ser resolvidas eficientemente em microcomputadores utilizando, por exemplo, o *software* MatLab® (Gahinet et al., 1995).

Técnicas baseadas em LMIs têm sido estudadas para vários propósitos, na literatura especializada pode-se encontrar trabalhos que relatam o uso em sistemas lineares, por exemplo, (Assunção et al., 2007), envolvendo sistemas lineares com incertezas politópicas (Leite et al., 2004), envolvendo sistemas não-lineares com ou sem incertezas no modelo (da Silva et al., 2009; Tanaka et al., 1998), abordando técnicas de controle baseadas na realimentação da derivada do vetor de estado - realimentação derivativa -

(da Silva et al., 2011a; da Silva et al., 2011b; da Silva et al., 2012), entre outras. No entanto, a grande maioria dos trabalhos apresentam simulações realizadas em modelos matemáticos, que representam sistemas reais, para testar e validar as técnicas de controle, uma vez que, nem sempre é possível ter acesso a um sistema real para a realização de implementações práticas.

Em (Buzachero et al., 2010a; Buzachero et al., 2010b; Buzachero et al., 2012) os autores apresentam implementações práticas de controladores baseados em LMIs em um helicóptero de bancada modelo 3-DOF fabricado pela Quanser®. De maneira análoga, este trabalho visa a implementação prática de um controlador baseado na realimentação derivativa e projetado com o uso de LMIs.

O estudo da realimentação derivativa é interessante e aplicável em sistemas que utilizam acelerômetros como sensores, tornando-se mais fácil obter o sinal da derivada do estado do que o sinal do estado. A partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, mas não o sinal de deslocamento (Abdelaziz and Valášek, 2005). Logo, os sinais utilizados para a realimentação são a aceleração e a velocidade. Respectivamente, estes sinais são as derivadas da velocidade e da posição que podem re-

presentar os estados do sistema. Devido a sua estrutura simples e ao baixo custo operacional, acelerômetros têm sido utilizados para a solução de vários tipos de problemas de engenharia (Kwak et al., 2002; Reithmeier and Leitmann, 2003; Assunção et al., 2007; Faria et al., 2009).

Usando uma técnica de controle, baseada na realimentação derivativa, proposta em (Faria et al., 2009), o objetivo deste trabalho é obter resultados práticos através da implementação em um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser<sup>®</sup> (Quanser, 2009).

A técnica utilizada permite que o projetista posicione os autovalores do sistema em malha fechada em uma região  $\mathcal{D}$  do semi-plano complexo negativo. Isso, além de assegurar a estabilidade, garante também certos requisitos de desempenho ao sistema realimentado (Chilali and Gahinet, 1996).

**Definição 1.1** Dada uma região  $\mathcal{D}$  do semi-plano esquerdo complexo. Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dita  $\mathcal{D}$ -estável se todos os seus autovalores estão contidos na região  $\mathcal{D}$  (Chilali and Gahinet, 1996).

**Notações:** Durante o texto utiliza-se as seguintes notações:  $M > 0$  ( $M \geq 0$ ) é usada para representar matrizes definidas (semi-definidas) positivas e de modo equivalente  $M < 0$  ( $M \leq 0$ ) representa matrizes definidas (semi-definidas) negativas;  $(\dots)^T$  indica transposição de um vetor ou matriz.

## 2 Realimentação derivativa em sistemas lineares incertos

Considere um sistema linear contínuo e com incertezas invariantes no tempo, descrito na forma de variáveis de estado:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (1)$$

sendo  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matrizes que representam a dinâmica do sistema incerto,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle.

As matrizes  $(A, B)(\alpha)$  pertencem a um politopo representado por

$$(A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A, B)_i, \quad (2)$$

em que  $r = 2^\phi$ , sendo  $\phi$  o número de incertezas nas matrizes  $(A, B)(\alpha)$  e  $(A, B)_i$  representam os vértices desse politopo. Os parâmetros  $\alpha_i$  são constantes reais desconhecidas, pertencentes a um simplex  $\mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \right\}. \quad (3)$$

Dessa forma, o sistema (1) pode ser representado pela combinação convexa de seus vértices

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (4)$$

Supondo que os vértices do sistema (4) não apresentem autovalores na origem ( $\det(A_i) \neq 0, \forall i$ ) (Abdelaziz and Valášek, 2004). O objetivo é encontrar uma matriz

constante  $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que, ao realimentar o sistema (4) com a entrada de controle

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \quad (5)$$

o sistema em malha fechada, dado por (4) e (5), seja  $\mathcal{D}$ -estável e a matriz  $\left( I + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d \right)$  invertível. Desse modo, o sistema em malha fechada pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x(t) - B_i K_d \dot{x}(t)) \\ \Leftrightarrow \dot{x}(t) &= \left( I + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d \right)^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

sendo  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz identidade.

## 3 Condições para a $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta

Para a formulação LMI, considere as seguintes substituições de variáveis (Chilali and Gahinet, 1996):  $r = \omega_n$ ,  $\zeta = \cos(\theta)$  e  $\gamma = \zeta \omega_n$ . A região de interesse para a alocação robusta é a região denominada  $S(\gamma, r, \theta)$  de números complexos  $x + y\mathbf{j}$  que satisfazem:

$$S(\gamma, r, \theta) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, & (a) \\ |x + y\mathbf{j}| < r, & (b) \\ \tan(\theta)x < -|y|, & (c) \end{cases}$$

a restrição (a) representa um semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto  $(-\gamma, 0)$ , com  $\gamma > 0$ , a restrição (b) representa um disco centrado na origem de raio  $r$  e a restrição (c) limita o argumento  $\theta$  dos elementos do conjunto. A região  $S(\gamma, r, \theta)$  pode ser vista na Figura 1.

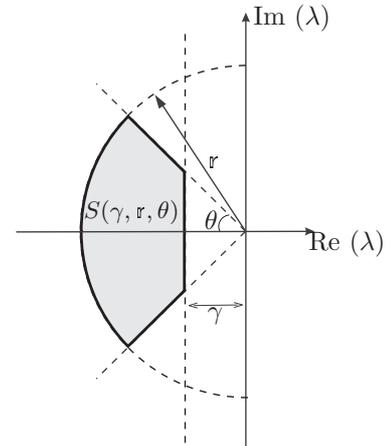


Figura 1: Região  $S(\gamma, r, \theta)$  para alocação de autovalores.

Quando os autovalores de um sistema de segunda ordem pertencem a região  $S(\gamma, r, \theta)$ , o sistema possui uma taxa de decaimento  $\gamma$  mínima, coeficiente de amortecimento  $\zeta = \cos(\theta)$  mínimo, e frequência amortecida  $\omega_d = r \sin(\theta)$  máxima (Chilali and Gahinet, 1996). Portanto, a região  $S(\gamma, r, \theta)$  estabelece limites para o overshoot máximo, o tempo de subida e o tempo de estabelecimento (Ogata, 2003).

A técnica de alocação de autovalores apresentada nessa seção usa o conceito de  $\mathcal{D}$ -estabilidade (ou estabilidade regional). Esse conceito permite que restrições de

projeto tais como porcentagem de *overshoot*  $PO\%$ , tempo de subida  $t_s$  e tempo de estabelecimento  $t_e$  sejam caracterizados por LMIs (Chilali and Gahinet, 1996; Ebihara and Hagiwara, 2004).

(Chilali and Gahinet, 1996) demonstraram que certas regiões convexas no plano complexo podem ser representadas por LMIs. Os resultados são obtidos considerando extensões da Definição 1.1. Neste trabalho, exploramos os resultados que garante a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas lineares incertos na região  $S(\gamma, r, \theta)$ . O principal resultado é mencionado abaixo.

**Lema 3.1** *Considere um sistema linear autônomo*

$$\dot{x}(t) = A_N x(t). \quad (7)$$

O sistema (7) é  $\mathcal{D}$ -estável, na região  $S(\gamma, r, \theta)$ , se e somente se, existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que, as LMIs abaixo sejam satisfeitas.

$$Q > 0, \quad (I)$$

$$A_N Q + Q A_N^T + 2\gamma Q < 0, \quad (II)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_N Q \\ Q A_N^T & -rQ \end{bmatrix} < 0, \quad (III)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left( (Q + B_j Y) A_i^T + A_i (Q + B_j Y)^T \right) & -A_i Q A_k^T \\ -A_k Q A_i^T & \frac{r}{2} \left( (Q + B_j Y) A_i^T + A_i (Q + B_j Y)^T \right) \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) [A_i Q + A_i Y^T B_j^T - (Q A_i^T + B_j Y A_i^T)] \\ \cos(\theta) [Q A_i^T + B_j Y A_i^T - (A_i Q + A_i Y^T B_j^T)] \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) [A_i Q + A_i Y^T B_j^T - (Q A_i^T + B_j Y A_i^T)] \\ \cos(\theta) [Q A_i^T + B_j Y A_i^T - (A_i Q + A_i Y^T B_j^T)] \end{bmatrix} < 0,$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  e  $k = 1, 2, \dots, r$ , com  $K_d = YQ^{-1}$ .

**Prova:** Veja (Faria et al., 2009).  $\square$

#### 4 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA QUANSER<sup>®</sup>

Considere o sistema de suspensão ativa de um veículo, fabricado pela Quanser<sup>®</sup>, mostrado na Figura 2 (Quanser, 2009). Seu modelo esquemático está representado na Figura 3. O sistema consiste de um conjunto composto por duas massas, denominadas  $M_s$  e  $M_{us}$ . A massa  $M_s$  representa  $\frac{1}{4}$  do corpo total do veículo e é suportada pela mola  $k_s$  e pelo amortecedor  $b_s$ . A massa  $M_{us}$  corresponde a massa do conjunto do pneu do veículo e é suportada pela mola  $k_{us}$  e pelo amortecedor  $b_{us}$ . Para diminuir as vibrações causadas por irregularidades na pista utiliza-se o sistema de suspensão ativa, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas  $M_s$  e  $M_{us}$ , e controlado pela força  $F_c$ .

Originalmente, o sistema de suspensão ativa Quanser<sup>®</sup> (Figura 2) não possui o acelerômetro para a medida de  $\ddot{z}_{us}(t)$ . Para a implementação da realimentação derivativa foi solicitado ao fabricante o acréscimo do acelerômetro ao sistema.

O modelo dinâmico (Quanser, 2009) pode ser repre-

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta)(A_N Q - Q A_N^T) & \cos(\theta)(A_N Q - Q A_N^T) \\ \cos(\theta)(Q A_N^T - A_N Q) & \cos(\theta)(A_N Q + Q A_N^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (IV)$$

**Prova:** Veja (Chilali and Gahinet, 1996).  $\square$

Considerando  $A_N = (I + B_j K_d)^{-1} A_i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , (Faria et al., 2009) apresenta condições suficientes, baseadas em CQLFs (Common Quadratic Lyapunov Function), para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de sistemas lineares incertos na região  $S(\gamma, r, \theta)$  usando a realimentação derivativa. O Lema 3.2 apresenta estas condições e a Figura 1 mostra a região  $S(\gamma, r, \theta)$  de alocação de autovalores.

**Lema 3.2** *Suponha que as matrizes  $A_i$  não possuam autovalores nulos ( $\det(A_i) \neq 0, \forall i$ ). Então, o sistema (6) é  $\mathcal{D}$ -estável, na região  $S(\gamma, r, \theta)$ , se existir uma matriz simétrica  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs (8).*

$$Q > 0,$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T & Q + B_j Y \\ Q + Y^T B_j^T & -\frac{Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0,$$

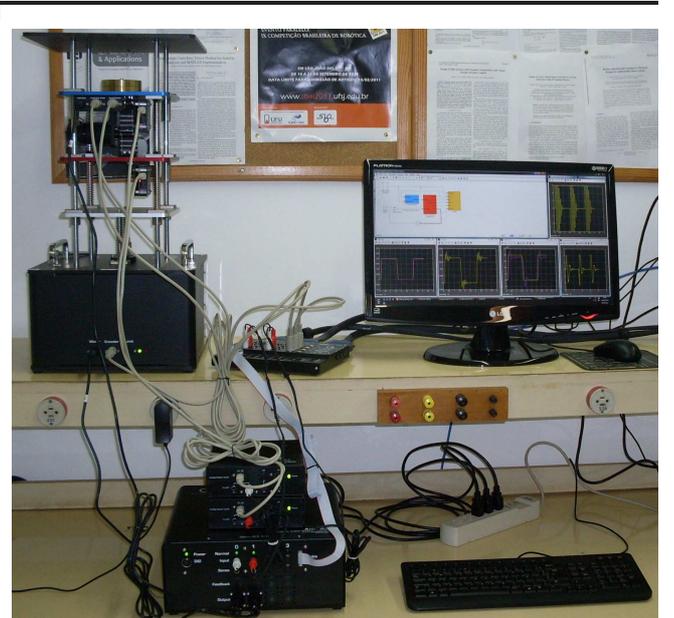


Figura 2: Sistema de suspensão ativa Quanser<sup>®</sup> pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.

sentado pelo sistema incerto (1), considerando (9).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t)$$

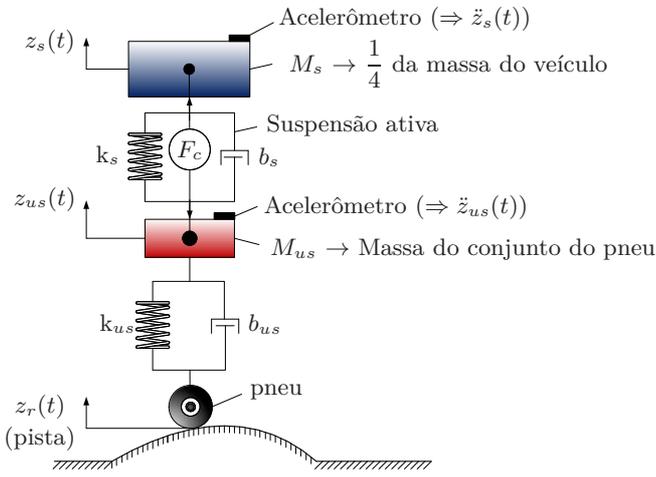


Figura 3: Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_s} \\ -1 & 0 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} & \frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t), \quad (9)$$

com

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_r(t) \\ F_c \end{bmatrix}.$$

Os valores das constantes podem ser encontrados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do sistema de suspensão ativa.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)	$M_s$	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	$M_{us}$	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	$k_s$	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	$k_{us}$	2500
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	$b_s$	7,5
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	$b_{us}$	5

No modelo físico do sistema de suspensão ativa existe uma massa de carga útil removível, constituída por duas unidades de peso idênticas, compondo a massa  $M_s$ . Cada unidade pesa 0,4975kg, de tal forma que a massa total corresponde aos 2,45kg informado na tabela acima. Logo, a massa  $M_s$  pode assumir valores entre 1,455kg (sem as duas unidades de peso) e 2,45kg (com as duas unidades de peso). Sendo assim, a massa  $M_s$  pode ser incerta e pertencer ao intervalo  $1,455 \leq M_s \leq 2,45$ (kg). Para uma melhor visualização um zoom foi aplicado na Figura 2 para destacar a massa de carga útil, veja a Figura 4.

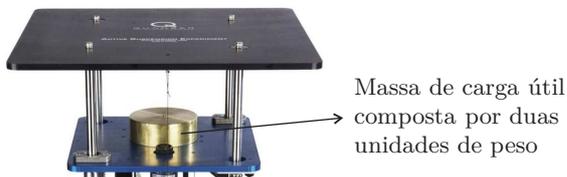


Figura 4: Ampliação visual para destacar a massa de carga útil.

Observe que a representação em espaço de estados do sistema (9) possui duas entradas, isto é, uma controla a velocidade da superfície da pista ( $\dot{z}_r$ ) e a outra controla a força ( $F_c$ ) aplicada no motor que atua na suspensão ativa. Neste exemplo, o procedimento para estabilizar o sistema consiste em determinar um ganho robusto de realimentação derivativa ( $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ) que atue somente na entrada de controle  $F_c$ , ou seja,  $F_c = -K_d \dot{x}(t)$ .

A partir dessas informações, são obtidos os seguintes vértices do polítopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,40816 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com  $M_s = 2,45$ kg em  $A_1$  e  $B_1$  (com a carga útil),

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,1546 & 0 & 5,1546 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,68729 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com  $M_s = 1,455$ kg em  $A_2$  e  $B_2$  (sem a carga útil).

Para a solução numérica das LMIs foi utilizado o software MatLab<sup>®</sup> e o solver “SeDuMi” (Sturm, 1999). As LMIs do Lema 3.2 foram resolvidas considerando  $\gamma = 0,75$ ,  $r = 90$  e  $\theta = 88^\circ$ , e o seguinte ganho robusto foi projetado:

$$K_d = \begin{bmatrix} 60,7472 & 1,7690 & -100,3885 & -0,3205 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

A Figura 5 representa o diagrama de controle utilizado para a implementação do controlador.

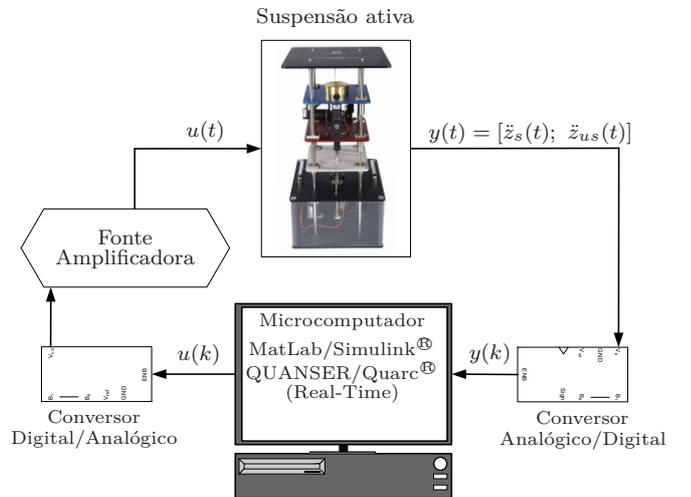


Figura 5: Diagrama utilizado para a implementação prática.

A eficiência da metodologia pode ser verificada na implementação prática verificada a seguir.

## 5 Implementação prática na suspensão ativa do Laboratório de Pesquisa em Controle

O objetivo da implementação prática consiste em atenuar, através do sistema de suspensão ativa, as oscilações causadas pela superfície da pista de rodagem ( $z_r(t)$ ). A referência  $z_r(t)$  foi escolhida para produzir um sinal de onda quadrada, de amplitude 0,02m, frequência de  $\frac{1}{3}$ Hz com largura de pulso de 50%. Ainda, adotou-se 1ms de período de amostragem. Foram realizadas duas implementações práticas, e para todos os casos foram geradas respostas de 20 segundos, sendo que, no intervalo de 0 a 9,99 segundos o sistema encontra-se em malha aberta, e em 10 segundos o sinal de controle, com realimentação derivativa  $F_c = -K\dot{x}(t)$ , passa a atuar no sistema em malha fechada.

**Primeira implementação:** Considere as duas unidades de peso acopladas no sistema de suspensão ativa ( $M_s = 2,45$ kg). O comportamento dinâmico do sistema real (Figura 2) pode ser visto na Figura 6. Pela figura, o sistema é naturalmente estável mesmo sem a ação de controle, porém, o sistema apresenta oscilações pouco amortecidas, gerando desconforto ao motorista. Entretanto, as oscilações abruptas podem ser suavizadas considerando o sistema controlado pela força  $F_c$ .

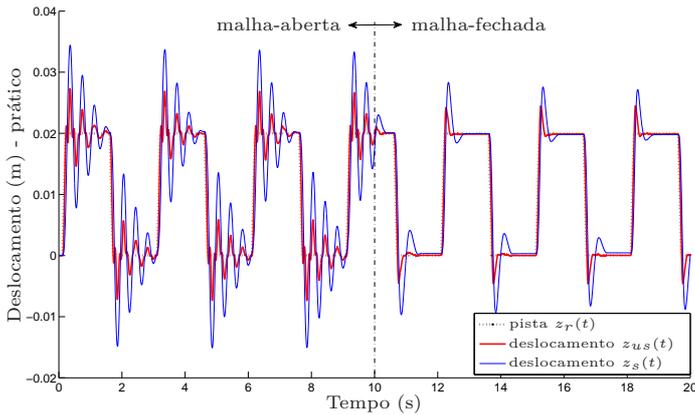


Figura 6: Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com  $M_s = 2,45$ kg.

Pelas respostas nota-se uma melhoria significativa considerando a realimentação derivativa no sistema de suspensão ativa. A Figura 7 exibe o esforço do sinal de controle  $F_c$  para o sistema com carga útil total ( $M_s = 2,45$ kg).

**Segunda implementação:** Por fim, nenhuma unidade de peso é considerada acoplada ao sistema de suspensão ativa ( $M_s = 1,455$ kg) para a execução da implementação. O comportamento dinâmico real pode ser visto na Figura 8.

A Figura 9 exibe o esforço do sinal de controle  $F_c$  para o sistema sem a carga útil ( $M_s = 1,455$ kg). Analisando as respostas obtidas, nota-se que o controlador robusto projetado foi capaz de amenizar as oscilações causadas pela pista  $Z_r$  para as duas condições de peso  $M_s$ .

## 6 Conclusões

Este trabalho propôs a validação teórica apresentada em (Faria et al., 2009), com a implementação prática de um controlador que, além de assegurar a estabilidade

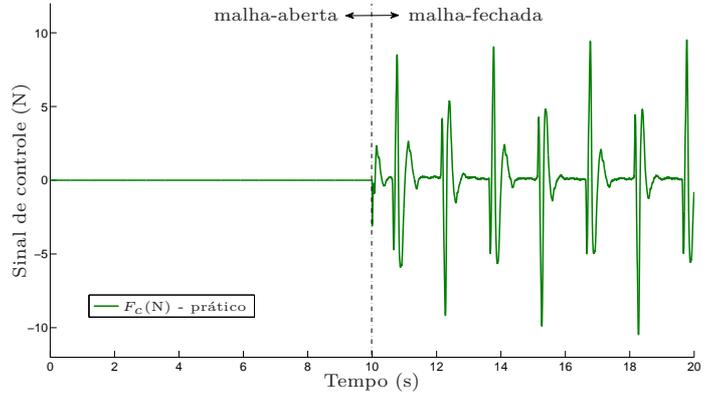


Figura 7: Sinal de controle atuando a partir de 10s, com  $M_s = 2,45$ kg.

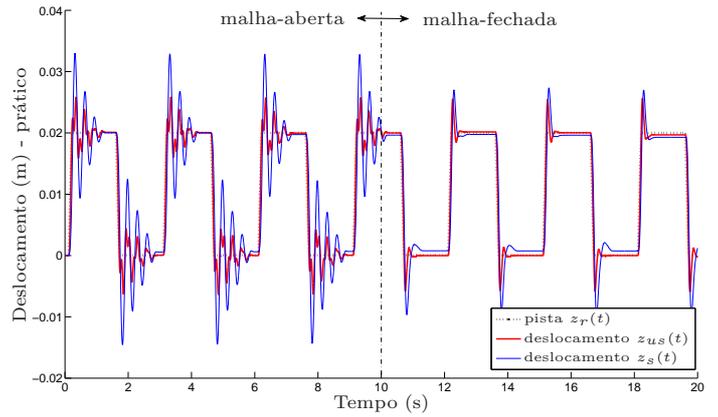


Figura 8: Resposta transitória prática de malha aberta e de malha fechada (a partir de 10s) com  $M_s = 1,455$ kg.

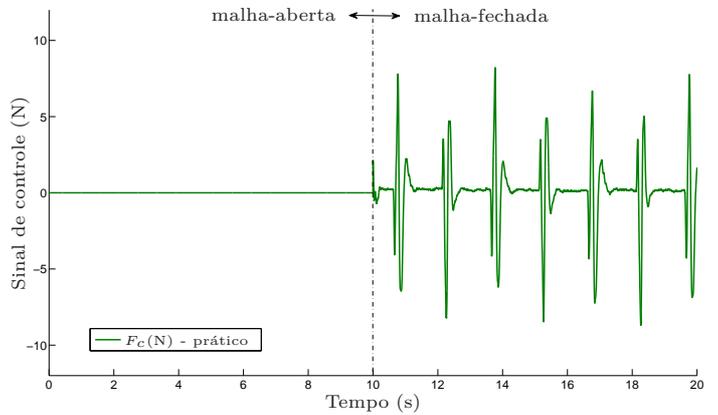


Figura 9: Sinal de controle atuando a partir de 10s, com  $M_s = 1,455$ kg.

do sistema, permite alocar os autovalores em uma região  $\mathcal{D}$  pré-estabelecida em projeto com a finalidade de obter uma resposta transitória adequada em malha fechada. Os resultados são particularmente interessante para a aplicação em sistemas mecânicos que utilizam acelerômetros como sensores. Ainda, a técnicas de controle baseada em LMIs tem a vantagem de permitir a inclusão de incertezas politópicas e índices de desempenho com facilidade na abordagem do problema. Na implementação feita no sistema de suspensão ativa foi verificado que o controlador projetado alcançou um desempenho satisfatório, mesmo considerando incertezas na massa  $M_s$ .

## Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de fomento CNPq<sup>1</sup> e FAPESP<sup>2</sup> (Processo: 2012/12945-7 vinculado ao Projeto Temático processo: 2011/17610-0) pelo apoio a este trabalho.

## Referências

- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2004). Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback, *IEE Proceedings-Control Theory Applications* **151**(4): 377–385.
- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2005). State derivative feedback by LQR for linear time-invariant systems, *16th IFAC World Congress, Czech Republic*.
- Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A., da Silva, N. A. P. and Cardim, R. (2007). Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems, *International Journal of Control* **80**(8): 1260–1270.
- Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. (2007). Alocação de zeros aplicada a sistemas de controle via LMI, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* **18**: 55 – 66.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Volume 15 of Studies in Applied Mathematics, 2nd edn, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Buzachero, L. F. S., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and da Silva, E. R. P. (2012). New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems, in G. L. de Oliveira Serra (Ed.) (ed.), *Frontiers in Advanced Control Systems*, InTech, pp. 75–100.
- Buzachero, L. F. S., Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A. and da Silva, E. R. P. (2010a). Implementações de controladores robustos com restrições de taxa de decaimento e otimizados em sistemas sujeitos a falhas, *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications*, Serra Negra-SP, pp. 954–960.
- Buzachero, L. F. S., Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A. and da Silva, E. R. P. (2010b). Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais, *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito-MS, pp. 4068–4075.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996).  $H_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- da Silva, E. R. P., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and Buzachero, L. F. S. (2012). Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback, *Mathematical Problems in Engineering* vol. **2012**: 21 pages.
- da Silva, E. R. P., Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A. and Buzachero, L. F. S. (2011b). Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems, *International Journal of Control* **84**(8): 1377–1386.
- da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Faria, F. A. (2009). Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados, *Anais do 9<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, SBA, Brasília. 6p. (Artigo 54988).
- da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Faria, F. A. (2011a). Estabilização de sistemas fuzzy T-S incertos usando realimentação derivativa, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* pp. 273 – 283.
- Ebihara, Y. and Hagiwara, T. (2004). New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis, *Automatica* **40**(11): 2003–2009.
- Faria, F. A., Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and da Silva, N. A. P. (2009). Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems, *International Journal of Control* **82**(1): 1–12.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI control toolbox - For use with MATLAB*, The Math Works Inc.
- Kwak, S. K., Washington, G. and Yedavalli, R. K. (2002). Acceleration feedback-based active and passive vibration control of landing gear components, *Journal of Aerospace Engineering* **15**(1): 1–9.
- Leite, V. J. S., Montagner, V. F., Oliveira, P. J. d., Oliveira, R. C. L. F., Ramos, D. C. W. and Peres, P. L. D. (2004). Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* **15**: 24 – 40.
- Ogata, K. (2003). *Engenharia de controle moderno*, 4 edn, Prentice Hall, New York.
- Quanser (2009). *Active Suspension - User's Manual*, Quanser Consulting Inc., Ontario, Canada.
- Reithmeier, E. and Leitmann, G. (2003). Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state, *Archive of Applied Mechanics* **72**(11–12): 856–864.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.

<sup>1</sup>Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

<sup>2</sup>Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.