

ANÁLISE E CONTROLE MULTIVARIÁVEL ROBUSTO \mathcal{D} -LQI OTIMIZADO VIA LMIS

M. V. S. COSTA,* J. C. T. CAMPOS,* O. M. ALMEIDA† V. P. PINTO‡

* *Universidade Federal do Ceará*
Depto. de Engenharia Elétrica - Campus do Pici
Fortaleza, Ceará, Brasil

† *Universidade Federal do Piauí*
Depto. de Engenharia Elétrica
Teresina, Piauí, Brasil

‡ *Universidade Federal do Ceará*
Depto. de Engenharia Elétrica - Campus Sobral
Sobral, Ceará, Brasil

Email: marcus12jc@hotmail.com, teles@ufc.br, otacilio@ufpi.br,
vandilberto@yahoo.com.br,

Abstract— This paper shows the robust \mathcal{D} -LQI concepts using multivariable models also considering the suitability solution to robust design parameters. This work shows that it is possible to use the \mathcal{D} -LQI MIMO models taking into account constraints obtained commonly criteria known in classical control. The example application is the linear dual tank. The simulation results are obtained using MATLAB and optimization tools SEDUMI and Yalmip.

Keywords— Multivariable Control, Robust Control, \mathcal{D} -Stability, LMIs Optimization.

Resumo— Este artigo mostra a aplicação dos conceitos de \mathcal{D} -LQI robusto em modelos multivariáveis considerando também a adequação da solução robusta aos parâmetros de projeto. Este trabalho mostra que é possível utilizar o \mathcal{D} -LQI em modelos MIMO levando-se em consideração restrições obtidas por meio de critérios simples amplamente conhecidos no controle clássico. O exemplo de aplicação é o tanque duplo linear. Os resultados de simulação são obtidos via MATLAB através das ferramentas de otimização SEDUMI e Yalmip.

Palavras-chave— Controle Multivariável, Controle Robusto, \mathcal{D} -Estabilidade, Otimização LMIs.

1 Introdução

A teoria de controle robusto via LMIs está recebendo cada vez mais atenção nos últimos congressos e simpósios brasileiros, apresentando soluções para vários tipos de problemas de análise, desempenho e síntese de sistemas lineares incertos. As desigualdades matriciais lineares (LMIs), como são conhecidas, podem ser trabalhadas através de diversos métodos de otimização. Podem ser citadas como exemplo a programação quadrática semi definida e a otimização convexa.

O trabalho de Ghaoui et al. (1992) faz a análise do processo de otimização via LMIs do LQR. Tal processo de otimização é utilizado nos trabalhos de Ko et al. (2006), Olalla et al. (2009) e Leite et al. (2011). O conceito de LMIs é classicamente conhecido em Boyd et al. (1994), que é a principal referência no assunto juntamente com o livro de Gahinet et al. (1995), publicada logo depois.

O artigo de Chilali and Gahinet (1996) propõe o uso do controle H_∞ com uso de restrições via \mathcal{D} -estabilidade, permitindo assim a adequação de uma solução robusta aos parâmetros desejados de projeto.

O trabalho de Costa, Pinto, Campos and do Nascimento (2012) faz o uso da \mathcal{D} -Alocação de polos robusta numa planta multivariável, ade-

quando o modelo robusto às condições desejadas de projeto.

O artigo de Costa, Campos, Reis, Bascope and Pinto (2012) aplica os conceitos do \mathcal{D} -LQI robusto em conversores de potência tipo dc-dc.

Este trabalho visa a aplicação dos conceitos de \mathcal{D} -LQI robusto em modelos multivariáveis considerando também a adequação da solução robusta aos parâmetros de projeto de acordo com o trabalho de Costa, Pinto, Campos and do Nascimento (2012). O exemplo de aplicação é feito por simulação no tanque duplo linear, que é utilizado por Leite et al. (2011). Este trabalho mostra que é possível utilizar o \mathcal{D} -LQI em modelos MIMO levando em consideração restrições que façam o modelo atender especificações de desempenho como *overshoot* e tempo de estabilização por meio de critérios simples amplamente conhecido no controle clássico.

2 Estratégia de controle proposta

2.1 Conceitos de dinâmica de estabilidade desejada

Seja uma função de transferência de 2ª ordem do tipo

perturbações de incertezas aditivas ou multiplicativas. Isto é justificado pelo teorema do ganho mínimo. Segundo Dorf and Bishop (2008) e Shahian and Hassul (1993), uma perturbação multiplicativa é dada por

$$\Delta_m(s) = \left(\frac{\tilde{G}(s)}{G(s)} - 1 \right), \quad (11)$$

em que $\Delta_m(s)$ é o simbolo da incerteza multiplicativa e $\tilde{G}(s)$ é o modelo com incertezas. Com base em Dorf and Bishop (2008) e Shahian and Hassul (1993), a perturbação é limitada em magnitude, supondo que $\tilde{G}(s)$ e $G(s)$ tenham o mesmo número de polos no semiplano s da direita. Logo a estabilidade não se altera se

$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \omega \in [-\infty, +\infty], \quad (12)$$

para análise com incertezas multiplicativas. O modelo de análise de estabilidade robusta pode ser feito tanto usando incertezas aditivas como multiplicativas. No entanto, para uso mais prático, a análise por incertezas multiplicativas é mais cômoda, pois usa-se apenas a função T , já que não é prático obter o $K(s)$ em servomecanismos com ação integral. Para este trabalho, é utilizada a análise por incertezas multiplicativas via incertezas paramétricas.

3.2 Conceitos básicos de LMI e \mathcal{D} -Estabilidade

Uma desigualdade matricial linear (*Linear Matrix Inequalities* - LMI) é uma variável $x \in \mathbb{R}^m$ descrita pela seguinte expressão (Boyd et al., 1994):

$$F(x) = F_0 + \sum_{k=1}^m x_k F_k, \geq 0, \quad (13)$$

em que $F(x)$ é uma função afim, em que $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são matrizes simétricas semi-definidas positivas. Uma das suas características é apresentar o formato simétrico em suas matrizes. A expressão em (13) consiste numa restrição convexa, isto é, o conjunto $x | F(x) \geq 0$ é convexo. Em (13) é mostrada como é aplicada o conceito de politopos no processo de restrição LMI. O conceito de estabilidade LMI pode ser definido pela desigualdade de Lyapunov generalizada dada por Boyd et al. (1994) e Palhares and Gonçalves (2008):

$$\begin{cases} \min_{P=P'} tr\{P\} \\ \text{sujeito a : } P > 0 \\ (A_i'P + PA_i) < -Q, i \in [1, n], n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad (14)$$

em que P é a matriz de estabilidade simétrica. O processo de estabilização pode ser aplicado fazendo-se a transformada de similaridade em P , substituindo-se A por $A - BK$ e fazendo-se $Y = KP$ em (14).

A teoria de Lyapunov também é estendida para tratar problemas de \mathcal{D} -Estabilidade. Isto é conhecido como regiões LMI (Chilali and Gahinet, 1996). Uma região LMI é uma região convexa no plano complexo, simétrica com respeito ao eixo real, definida por:

$$\mathcal{D} \triangleq \{z \in \mathbb{C} | L + zM + \bar{z}M' < 0\}, \quad (15)$$

sendo $L = L'$ e M matrizes reais. De (15), pode-se fazer diversos tipos de restrição no plano complexo. Desta definição é feita a estabilização por alocação de polos aplicado por Palhares and Gonçalves (2008).

3.3 Controle \mathcal{D} -LQI robusto via LMI

O controle LQI com \mathcal{D} -Estabilidade LMI, o \mathcal{D} -LQI utiliza-se da minimização sistemática do índice de desempenho, definido por

$$J_{LQI} = \int_0^\infty (\hat{x}'Q\hat{x} + u'Ru)dt, \quad (16)$$

em que LQI é o controle LQR com o servomecanismo de ação integral. O índice de desempenho (16) é adaptado para desigualdades matriciais lineares conforme Ghaoui et al. (1992) e aplicado por Ko et al. (2006) e Olalla et al. (2009). Porém o processo de \mathcal{D} -Estabilidade dá ao LQI uma solução robusta e otimizada considerando-se as limitações físicas de projeto e considerando-se seus efeitos de regime em malha fechada, neste caso são utilizados o *overshoot* e o tempo de acomodação do modelo.

A Figura 2 mostra a aplicação LQI otimizada via LMI com \mathcal{D} -Estabilidade, o \mathcal{D} -LQI. Observa-se que a região estável que pode ser obtida pela otimização LQI é limitada pelos critérios de \mathcal{D} -estabilidade, neste caso o σ e o θ , que são critérios obtidos via o *Overshoot* e o tempo de estabilização.

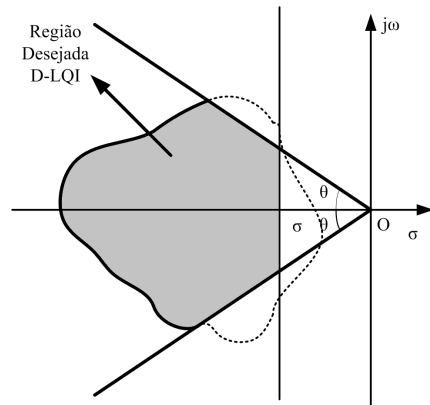


Figura 2: Região desejada aplicada ao LQI com \mathcal{D} -Estabilidade .

Portanto, \hat{K} é dado pelos seguintes processos LMIs em (17).

$$\begin{aligned}
& \min \operatorname{tr}(QP) + (Z), \\
& -2h_1P + \left(\hat{A}_iP - \hat{B}_iY \right) + \left(\hat{A}_iP - \hat{B}_iY \right)' < 0, \\
& \begin{bmatrix} T_1 \operatorname{sen} \theta & T_2 \cos \theta \\ T_2 \cos \theta & T_1 \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} < 0 \\
& \text{sujeito a } \begin{bmatrix} Z & R^{1/2}Y \\ Y'R^{1/2} & P \end{bmatrix} > 0, P > 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

para $i = 1 \rightarrow n$, sendo $n = 4$, em que $\hat{K} = YP^{-1}$ e que

$$\begin{aligned}
T_1 &= \left(\hat{A}_iP - \hat{B}_iY \right) + \left(\hat{A}_iP - \hat{B}_iY \right)', \\
T_2 &= \left(\hat{A}_iP - \hat{B}_iY \right) - \left(\hat{A}_iP - \hat{B}_iY \right)'.
\end{aligned}$$

O modelo em malha fechada segue as expressões mostradas em (9), sendo que a ordem da matriz de ponderação Q é igual a matriz \hat{A} e a ordem da matriz R é igual ao número de colunas da matriz \hat{B} .

4 Exemplo de Aplicação

A Figura 3 mostra o modelo de um tanque duplo linear. As entradas do tanque são variações das vazões medidas u_1 e u_2 em (m^3/s). As saídas do processo são as variações de altura h_1 e h_2 . H_1 e H_2 são as alturas médias das colunas no tanque em (m). Qu_1 e Qu_2 são as vazões médias de entrada do tanque e Q_1 , Q_2 são as vazões médias de transição nos tubos de conexões. A expressão do tanque segue o mesmo modelo apresentado por Bachur et al. (2010).

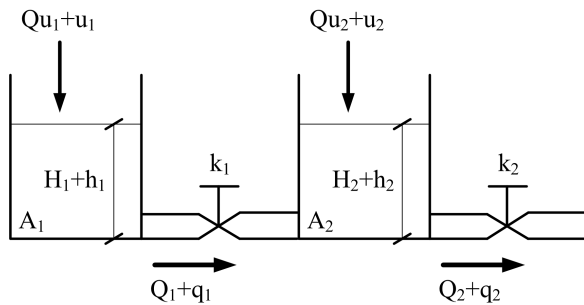


Figura 3: Sistema de controle de nível de 2 tanques.

O modelo matemático do duplo tanque da Figura 3 é dado por:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & \frac{k_2}{A_1} \\ -\frac{k_1}{A_2} & -\left(\frac{k_1+k_2}{A_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{18}$$

e

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Sabe-se que as áreas das seções dos tanques são $A_1 = A_2 = 5m^2$, segundo Bachur et al. (2010). Admite-se uma faixa de imprecisão de $0,15 \leq k_1 \leq 0,25$ e de $0,2 \leq k_2 \leq 0,3$, como apresentado também por Bachur et al. (2010). Essas faixas de imprecisão podem ser modeladas por incertezas politópicas. Deste modo, tais imprecisões são incorporadas ao processo de resolução via LMIs. A estratégia de controle \mathcal{D} -LQI visa à minimização do índice de desempenho mediante a escolha dos parâmetros de ponderação Q e R além da restrição via \mathcal{D} -estabilidade.

O tempo de simulação do processo é de 400 segundos. A altura de referência h_1 é escolhida de $0,2m$ até o tempo $t = 200s$. Em seguida, é reduzida para $0,15m$ de $t = 200s$ em diante. No mesmo instante, a altura de referência h_2 é escolhida de $0,1m$ até o tempo $t = 200s$, em seguida, é alterada para $0,15m$ do $t = 200s$ em diante. As matrizes de ponderação escolhidas foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Para o dimensionamento do processo de restrições, fez-se o $POS = 1\%$ e o $T_s = 60s$, de modo que $h_1 = \sigma_p = 0,0667ras/s$ e $\theta = 34,30^\circ$. Do procedimento de otimização foram obtidos os seguintes ganhos de realimentação de estados:

$$\hat{K}_{\mathcal{D}LQI} = \begin{bmatrix} 1,2884 & 0,1614 & -0,1135 & 0,0036 \\ 0,1590 & 1,0600 & 0,0038 & -0,1154 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

em que

$$K = \begin{bmatrix} 1,2884 & 0,1614 \\ 0,1590 & 1,0600 \end{bmatrix} \tag{22}$$

e

$$K_i = \begin{bmatrix} -0,1135 & 0,0036 \\ 0,0038 & -0,1154 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

conforme (17).

Observa-se ainda que os valores de σ dos autovalores de malha fechada são superiores, em módulo, ao de σ_p , em que $0,144 > \sigma_p$ e $0,1408 > \sigma_p$ respectivamente. Além disso, os ângulos de fase são inferiores ao limite projetado aos quais $14,59 \text{ deg} < \theta$ e $23,60 \text{ deg} < \theta$ respectivamente, comprovando a factibilidade no processo de otimização.

Além disso, através da análise de robustez do processo, foi obtido o modelo de incertezas através de (11), e utilizando a função *sigma* do MATLAB são obtidos as curvas via SVD's.

Na Figura 4, observa-se que a resposta é bem mais rápida que a restrição projetada com $POS = 1\%$ e $T_s = 60s$. De acordo com a Figura

4, o *overshoot* é de cerca de 1% e tempo de estabilização é de 40s, isso considerando uma perturbação tanto no estado de medição como na saída de 0,1%, sendo então o ruído tipo branco.

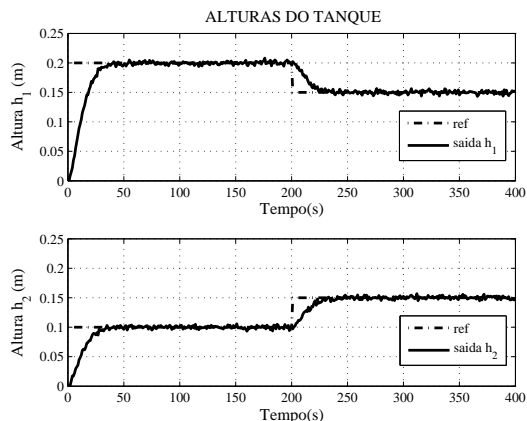


Figura 4: Resposta de regime das curvas da variação de altura.

A Figura 5 mostra o sinal de controle do tanque duplo. Vê-se que os efeitos das perturbações são mais atuantes no sinal de controle que propriamente na saída do processo. Observa-se ainda um sobressinal nos primeiros 50s do período de simulação. Isto ocorre devido às características do modelo e o esforço do atuador de garantir a resposta degrau desejada.

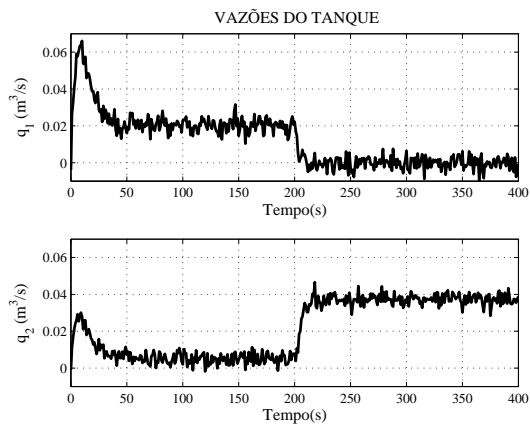


Figura 5: Sinal de controle das vazões do tanque.

Analisando-se a Figura 6, vê-se que o sistema é estavelmente robusto, pois não existe nenhum cruzamento entre as incertezas multiplicativas e a curva do inverso da co-sensibilidade.

5 Conclusões

Os resultados obtidos comprovaram que a estratégia de controle \mathcal{D} -LQI via LMIs é eficaz como controle robusto. Isto por que é capaz de incluir características referentes á imprecisão do processo,

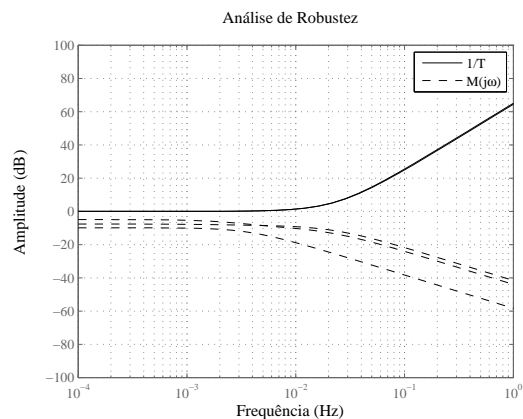


Figura 6: Análise da estabilidade robusta do controlador via SVD.

além de ser possível o uso de restrições que garantam que o processo alcançará os parâmetros desejados de projeto. Esta vantagem torna o controle \mathcal{D} -LQI via LMIs uma poderosa estratégia na otimização de soluções de controle robusto. Os resolvidores YALMIP e SEDUMI são ferramentas conhecidas bastante eficazes para o processamento desses cálculos no software computacional MATLAB/Simulink.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES, pelo fomento financeiro e pelo PPGEE-UFC pelo suporte acadêmico e recursos de pesquisa.

Referências

- Bachur, W. E. G., Palhares, E. N. G. R. M. and Takahashi, R. H. C. (2010). Síntese de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída considerando modelo de referência baseada na otimização de parâmetros do controlador, *Proceedings, Congresso Brasileiro de Automática, SBA, Bonito, MS, Brasil*, pp. 4062–4067.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM studies in applied mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM - Philadelphia, Philadelphia, USA.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints: an lmi approach, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **41**(3): 358–367.
- Costa, M. V. S., Campos, J. C. T., Reis, F. E. U., Bascope, R. P. T. and Pinto, V. P. (2012). Análise teórico-experimental do controle d-lqi via lmis aplicado ao conversor boost ccte

42v-54v 500w, *Proceedings*, 10th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications - INDUSCON, INDUCON2012, Fortaleza, CE, Brasil.

- Costa, M. V. S., Pinto, V. P., Campos, J. C. T. and do Nascimento, J. A. (2012). Controle por d-alocação robusta via lmi aplicado em sistemas de geração eólica, *Proceedings*, Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos - SBSE, SBSE2012, Goiania, GO.
- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2008). *Modern Control Systems*, Addison-Wesley.
- Gahinet, P., Arkadi Nemirovski, A. J. L. and Chiali, M. (1995). *LMI control toolbox users guide*, MathWorks Inc, Natick, MA.
- Ghaoui, L. E., Feron, E., Balakrishnan, V. and Boyd, S. (1992). Numerical methods for h2 related problems, *Proceedings*, American Control Conference, AACC, Chicago, IL, USA, p. 2. ref. 1-2.
- Ko, H. S., Dumont, G. A., Jatskevich, J. and Moshref, A. (2006). A new lmi representation of lqr based voltage control of grid-connected wind farm, *Proceedings*, American Control Conference, AACC, IFAC, Minneapolis, Minnesota, USA, p. 6. ref. 851-856.
- Leite, K., Campos, J. C. T. and Costa, M. V. S. (2011). Aplicação e análise de controle lqr com ação integral robusta multivariável otimizado via desigualdades matriciais lineares, *Proceedings*, X CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, DINCON2011, Aguas de Lindoia, SP.
- Ogata, K. (2011). *Engenharia de Controle Moderno*, 5a edn, Prentice-Hall, São Paulo.
- Olalla, C., Leyva, R., Aroudi, A. E. and Queinnec, I. (2009). Robust lqr control for pwm converters: an lmi approach, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(7): 2548-2558.
- Palhares, R. M. and Gonçalves, E. N. (2008). *Enciclopédia de automática controle e automação*, Vol. 1 of *Enciclopédia de automática*, Blucher, São Paulo.
- Shahian, B. and Hassul, M. (1993). *Control system design using Matlab*, Prentice Hall.