

CONTROLE \mathcal{D} -ESTÁVEL VIA REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS SUJEITOS A FALHAS ESTRUTURAIS

EMERSON RAVAZZI P. DA SILVA*, EDVALDO ASSUNÇÃO†, MARCELO C. M. TEIXEIRA†

**UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio
Avenida Alberto Carazzai, 1640. 86300-000
Cornélio Procópio, PR, Brasil*

†*Faculdade de Engenharia
UNESP - Univ Estadual Paulista, Campus de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC)
Avenida José Carlos Rossi, nº 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil*

Emails: e.ravazzi@bol.com.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, marcelo@dee.feis.unesp.br

Abstract— Using linear matrix inequalities (LMIs), sufficient conditions for the existence of fixed controllers that guarantee the robust \mathcal{D} -stability of polytopic linear systems via state-derivative feedback are proposed. The LMIs conditions are obtained by means of a parameter-dependent Lyapunov function (PDLF). In the context of uncertain systems, the use of PDLF allows, in the most of the time, to solve a problem when a common quadratic Lyapunov function (CQLF) does not solve. A numerical example illustrates the efficiency of the result presented.

Keywords— \mathcal{D} -stability, state-derivative feedback, linear systems, polytopic uncertainties, structural fault, linear matrix inequalities (LMIs).

Resumo— Utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*), neste trabalho são propostas condições suficientes para a existência de controladores estáticos que garantem a \mathcal{D} -estabilidade robusta de sistemas lineares politópicos através da realimentação derivativa. As condições LMIs são obtidas a partir de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF). No contexto de sistemas incertos, a utilização de uma PDLF permite, na maioria das vezes, solucionar problemas quando uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF) falha. Um exemplo numérico ilustra a eficiência do resultado apresentado.

Palavras-chave— \mathcal{D} -estabilidade, realimentação derivativa, sistemas lineares, incertezas politópicas, falhas estruturais, desigualdades matriciais lineares (LMIs).

1 Introdução

Em alguns projetos práticos, por exemplo, no controle de sistemas vibratórios, pode ocorrer que o sinal da derivada de segunda ordem (aceleração) de uma variável de estado (posição), obtido a partir de sensores do tipo acelerômetros, seja mensurado mais facilmente do que o sinal de estado. A partir do sinal da aceleração é possível reconstruir o sinal da velocidade com boa precisão, mas não o sinal de deslocamento (Abdelaziz and Valášek, 2004). Logo, os sinais da aceleração e da velocidade podem ser usados na realimentação desses processos, esses sinais são as derivadas da velocidade e do deslocamento que podem representar os estados do sistema.

Devido a sua estrutura simples e ao baixo custo operacional, acelerômetros têm sido utilizados para a solução de vários tipos de problemas (Kwak et al., 2002b; Reithmeier and Leitmann, 2003; Duan et al., 2005). Ainda, existem vários trabalhos, publicados nos últimos anos, que abordam técnicas de controle baseadas na realimentação da derivada do vetor de estado (realimentação derivativa). Por exemplo, (Kwak et al., 2002a) apresentam o projeto de um regulador linear quadrático (LQR, acrônimo inglês para *Linear Quadratic Regulator*). (Cardim et al., 2007) oferecem uma forma de obter o controlador da realimentação derivativa a partir da realimentação de estados usual. Uma investigação sobre a estabilizabilidade e robustez da estabilidade, incluindo a fragilidade, pode ser vista no trabalho de (Michiels et al., 2009). Projetos de controladores realizados com desigualdades matriciais lineares (LMIs, acrônimo inglês para *Linear Matrix Inequalities*) podem ser vistos em (Assunção et al., 2007; da Silva et al., 2012; da Silva et al., 2011a).

Estratégias via LMIs são fundamentadas no critério de estabilidade segundo Lyapunov e possuem certas vantagens como, por exemplo, simplicidade no tratamento de incertezas no modelo e facilidade de incluir índices de desempenho na abordagem do problema (Boyd et al., 1994).

Seguindo esse critério, neste trabalho são apresentadas condições suficientes baseadas em LMIs para a síntese de controladores robustos estáticos que asseguram a \mathcal{D} -estabilidade de sistemas lineares sujeitos a falhas estruturais no modelo. Tais falhas são representadas através de incertezas de tipo politópicas. Simulações digitais considerando falhas no modelo dinâmico podem ser vistas, por exemplo, em (Faria et al., 2009; Faria et al., 2010; da Silva et al., 2011a; da Silva et al., 2011b).

Posicionando os autovalores dentro da região \mathcal{D} estipulada em projeto, além de assegurar a estabilidade do sistema, o projetista garante especificações de desempenho como taxa de decaimento, porcentagem de *overshoot* e tempo de subida, alcançando assim respostas transitórias satisfatórias ao sistema em malha fechada (Leite et al., 2004).

Definição 1.1 *Dada uma região \mathcal{D} do semiplano esquerdo complexo. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita \mathcal{D} -estável se todos os seus autovalores estão contidos na região \mathcal{D} (Chilali and Gahinet, 1996).*

A definição acima vem de um resultado clássico apresentado em (Chilali and Gahinet, 1996), onde é demonstrado que certas regiões do semiplano complexo negativo podem ser caracterizadas por LMIs. Nessa direção, (Faria et al., 2009) estendem um estudo envolvendo o projeto de controladores de sistemas lineares incertos ou não via realimentação derivativa. Uma técnica para a \mathcal{D} -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais, com realimentação derivativa, pode ser vista

em (Assunção et al., 2008). Os resultados apresentados em (Faria et al., 2009; Assunção et al., 2008) abordam formulações LMIs clássicas, fundamentadas na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (CQLF, acrônimo inglês para *Common Quadratic Lyapunov Function*) para garantir a estabilidade do sistema.

No entanto, neste trabalho, utiliza-se uma função de Lyapunov dependente de parâmetros (PDLF, acrônimo inglês para *Parameter-Dependent Lyapunov Function*) para o projeto da \mathcal{D} -estabilidade robusta via realimentação derivativa. Uma vantagem em utilizar uma PDLF é que, na maior parte das ocasiões, existe a possibilidade de obter um ganho \mathcal{D} -estabilizante robusto quando o projeto utilizando uma CQLF falha, i.e., pode-se conseguir condições de estabilidade menos conservadoras com a utilização de uma PDLF (da Silva et al., 2011a; da Silva et al., 2012).

Durante o texto usa-se as seguintes notações: $M > 0$ é usada para representar matrizes definidas positivas e de modo equivalente $M < 0$ representa matrizes definidas negativas; $(^T)$ indica transposição de um vetor ou matriz; $(^{-T})$ indica a inversa de uma matriz transposta; $\text{diag}(\cdot, \dots, \cdot)$ indica uma matriz diagonal de dimensões adequadas e $\text{He}\{A\} := A + A^T$. A eficiência do método proposto é ilustrada através de um exemplo numérico.

2 Realimentação derivativa em sistemas lineares incertos

Considere um sistema linear contínuo no tempo descrito por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (1)$$

sendo $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes que representam a dinâmica do sistema incerto, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle.

As matrizes $(A, B)(\alpha)$ pertencem a um politopo representado por

$$(A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A, B)_i, \quad (2)$$

sendo $r = 2^\phi$, onde ϕ é o número de incertezas nas matrizes $(A, B)(\alpha)$ e $(A, B)_i$ representam os vértices desse politopo. Os parâmetros α_i são constantes reais desconhecidas, pertencentes a um simplex \mathcal{M} dado por

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \right\}. \quad (3)$$

Embora α não dependa explicitamente do tempo, o sistema incerto (1) pode possuir parâmetros variantes, sendo admitidas taxas de variação suficientemente pequenas de forma a garantir o tempo de acomodação necessário às perturbações oriundas de tais variações (Dahleh and Dahleh, 1991; Leite et al., 2004).

Dessa forma, o sistema (1) pode ser representado pela combinação convexa de seus vértices

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)). \quad (4)$$

Supondo que os vértices do sistema (4) não apresentem autovalores na origem ($\det(A_i) \neq 0, \forall i$) (Abdelaziz and Valášek, 2004). O objetivo é encontrar uma matriz

constante $K_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que, ao realimentar o sistema (4) com a entrada de controle

$$u(t) = -K_d \dot{x}(t), \quad (5)$$

o sistema em malha fechada, dado por (4) e (5), seja \mathcal{D} -estabilizável e a matriz $\left(I + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d \right)$ invertível. Desse modo, o sistema em malha fechada pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = \left(I + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d \right)^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t), \quad (6)$$

ou

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t) - \left(I + \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i K_d \right) \dot{x}(t) = 0. \quad (7)$$

sendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade.

Para a obtenção dos resultados, utiliza-se ao longo do texto a Propriedade 2.1 e o Lema 2.1.

Propriedade 2.1 *Para toda matriz \mathcal{H} não simétrica ($\mathcal{H} \neq \mathcal{H}^T$), se $\mathcal{H} + \mathcal{H}^T < 0$, então \mathcal{H} é invertível (Boyd et al., 1994).*

Lema 2.1 (Lema de Finsler) *Considere $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{D}(\alpha) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ com posto ($\mathcal{B}(\alpha)$) $< n$ e $\mathcal{B}(\alpha)^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}(\alpha)$ (isto é $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0$).*

Então as seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\mathcal{W}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{W} < 0, \quad \forall \mathcal{W} \neq 0, \quad \mathcal{B}(\alpha) \mathcal{W} = 0,$
 - (ii) $\mathcal{B}(\alpha)^\perp{}^T \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^\perp < 0,$
 - (iii) $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D}(\alpha) - \rho \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{B}(\alpha) < 0,$
 - (iv) $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} : \mathcal{D}(\alpha) + \mathcal{Q} \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{Q}^T < 0,$
- sendo ρ e \mathcal{Q} variáveis adicionais (ou multiplicadoras).*

Prova: Veja (Skelton et al., 1998). □

O Lema 2.1 pode ser usado para evitar o produto da matriz P da função de Lyapunov com as matrizes do sistema (7), permitindo o uso de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros, $P_i, i = 1, 2, \dots, r$, no projeto dos controladores (Apkarian et al., 2001):

$$V(x(t), \alpha) = x(t)^T P(\alpha) x(t) > 0, \quad P(\alpha) = P(\alpha)^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (8)$$

$$\text{com} \quad P(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \quad \text{e} \quad \alpha_i \in \mathcal{M}. \quad (9)$$

3 Condições para a \mathcal{D} -estabilidade robusta

Para a formulação LMI, considere as seguintes substituições de variáveis (Chilali and Gahinet, 1996): $r = \omega_n$, $\zeta = \cos(\theta)$ e $\gamma = \zeta \omega_n$. A região de interesse para a alocação robusta é a região denominada $S(\gamma, r, \theta)$ de números complexos $x + yj$ que satisfazem:

$$S(\gamma, r, \theta) = \{(a) \ x < -\gamma < 0; (b) \ |x + yj| < r; (c) \ \tan(\theta)x < -|y|,$$

a restrição (a) representa um semiplano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto $(-\gamma, 0)$, com $\gamma > 0$, a restrição (b) representa um disco centrado na origem de raio r e a restrição (c) limita o argumento θ dos elementos do conjunto. A região $S(\gamma, r, \theta)$ pode ser vista na Figura 1.

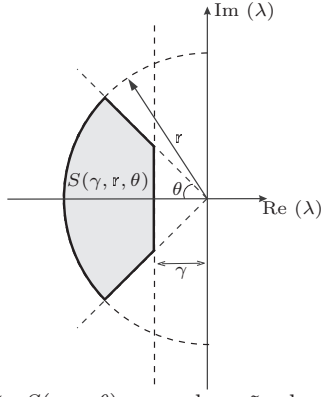


Figura 1: Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.

Quando os autovalores de um sistema de segunda ordem pertencem a região $S(\gamma, r, \theta)$, o sistema possui uma taxa de decaimento γ mínima, coeficiente de amortecimento $\zeta = \cos(\theta)$ mínimo, e frequência amortecida $\omega_d = r \sin(\theta)$ máxima (Chilali and Gahinet, 1996; Ebihara and Hagiwara, 2004). Portanto, a região $S(\gamma, r, \theta)$ estabelece limites para o *overshoot* ($PO\%$) máximo, o tempo de subida (t_s) e o tempo de estabelecimento (t_e) (Ogata, 2003).

Para obtenção dos resultados são consideradas extensões da Definição 1.1 e do Lema 3.1.

Lema 3.1 Considere um sistema linear autônomo

$$\dot{x}(t) = A_N x(t). \quad (10)$$

O sistema (10) é \mathcal{D} -estável, na região $S(\gamma, r, \theta)$, se e somente se, existir uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que, as LMIs abaixo sejam satisfeitas.

$$Q > 0, \quad (I)$$

$$A_N Q + Q A_N^T + 2\gamma Q < 0, \quad (II)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) (A_i L^T + L A_i^T) & \text{sen}(\theta) (Q_i - L^T - B_i G + L A_i^T) & \cos(\theta) (Q_i + L^T + B_i G + L A_i^T) & \cos(\theta) (-A_i L^T + L A_i^T) \\ \text{sen}(\theta) (Q_i + A_i L^T - L - G^T B_i^T) & \text{sen}(\theta) (-L^T - B_i G - L - G^T B_i^T) & \cos(\theta) (L^T + B_i G - L - G^T B_i^T) & \cos(\theta) (-Q_i - A_i L^T - L - G^T B_i^T) \\ \cos(\theta) (Q_i + A_i L^T + L + G^T B_i^T) & \cos(\theta) (-L^T - B_i G + L + G^T B_i^T) & \text{sen}(\theta) (-L^T - B_i G - L - G^T B_i^T) & \text{sen}(\theta) (Q_i + A_i L^T - L - G^T B_i^T) \\ \cos(\theta) (A_i L^T - L A_i^T) & \cos(\theta) (-Q_i - L^T - B_i G - L A_i^T) & \text{sen}(\theta) (Q_i - L^T - B_i G + L A_i^T) & \text{sen}(\theta) (A_i L^T + L A_i^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (11d)$$

Prova: A demonstração do Teorema 3.1 é formada por três partes, isto é, cada LMI é provada individualmente.

(**Parte 1** - LMI (11b)) Considerando as mudanças de variáveis $L = Z^{-1}$, $G = K_d Z^{-T}$ e $Q_i = Z^{-1} P_i Z^{-T}$ em (11b), segue (12).

$$\begin{bmatrix} 2\gamma Z^{-1} P_i Z^{-T} + A_i Z^{-T} + Z^{-1} A_i^T & \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} - Z^{-1} - Z^{-1} K_d^T B_i^T + A_i Z^{-T} & \\ Z^{-1} P_i Z^{-T} - Z^{-T} - B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1} A_i^T & \\ - (Z^{-T} + Z^{-1}) - (B_i K_d Z^{-T} + Z^{-1} K_d^T B_i^T) & \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

Multiplicando (12) à esquerda por $\text{diag}(Z, Z)$ e à direita por $\text{diag}(Z^T, Z^T)$, por α_i e somando em $i = 1, 2, \dots, r$, segue (13).

$$\begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) + Z A(\alpha) + A(\alpha)^T Z^T & \\ P(\alpha) - Z^T - K_d^T B(\alpha)^T Z^T + Z A(\alpha) & \\ P(\alpha) - Z - Z B(\alpha) K_d + A(\alpha)^T Z^T & \\ - (Z + Z^T) - (Z B(\alpha) K_d + K_d^T B(\alpha)^T Z^T) & \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\text{de } -Z - Z^T - Z B(\alpha) K_d - K_d^T B(\alpha)^T Z^T < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & A_N Q \\ Q A_N^T & -rQ \end{bmatrix} < 0, \quad (III)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(A_N Q + Q A_N^T) & \cos(\theta)(A_N Q - Q A_N^T) \\ \cos(\theta)(Q A_N^T - A_N Q) & \text{sen}(\theta)(A_N Q + Q A_N^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (IV)$$

Prova: Veja (Chilali and Gahinet, 1996). \square

Considerando $A_N = (I + B_j K_d)^{-1} A_i$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, (Faria et al., 2009) apresentam condições suficientes, baseadas em CQLFs, para a \mathcal{D} -estabilidade de sistemas lineares incertos na região $S(\gamma, r, \theta)$ usando a realimentação derivativa.

O interesse agora é estudar a \mathcal{D} -estabilidade do sistema incerto (7) na região $S(\gamma, r, \theta)$ utilizando uma PDLF. Para a solução desse problema, condições suficientes são propostas no Teorema 3.1. Para a demonstração do teorema, o Lema 3.1 é essencial.

Teorema 3.1 Suponha que as matrizes A_i não possuam autovalores nulos ($\det(A_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$). Sejam $\gamma > 0$, $r > 0$ e $\theta > 0$ números reais conhecidos, o sistema (7) é \mathcal{D} -estabilizável, na região $S(\gamma, r, \theta)$, com ganho $K_d = G L^{-T}$, se existirem matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as LMIs (11).

$$Q_i > 0, \quad \forall i, \quad (11a)$$

$$\begin{bmatrix} 2\gamma Q_i + A_i L^T + L A_i^T & Q_i - L^T - B_i G + L A_i^T \\ Q_i - L - G^T B_i^T + A_i L^T & -(L^T + L) - (B_i G + G^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (11b)$$

$$\begin{bmatrix} -rQ_i + A_i L^T + L A_i^T & -L^T - B_i G + L A_i^T & 0_{n \times n} \\ -L - G^T B_i^T + A_i L^T & -(L^T + L) - (B_i G + G^T B_i^T) & Q_i \\ 0_{n \times n} & Q_i & -rQ_i \end{bmatrix} < 0, \quad (11c)$$

$Z(I + B(\alpha)K_d) + (I + B(\alpha)K_d)^T Z^T > 0$ e segundo a Propriedade 2.1, conclui-se que $Z(I + B(\alpha)K_d)$ é invertível, logo $(I + B(\alpha)K_d)$ e Z são invertíveis (essa dedução se repete nas provas das LMIs (11c) e (11d)). Do item (iv) do Lema 2.1, a desigualdade (13) pode ser reescrita como (14).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} Z \\ Z \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0. \quad (14)$$

Agora, note que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0_{n \times n}$ com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Pelo item (ii) do Lema 2.1 a equivalência é estabelecida

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp{}^T \times \underbrace{\begin{bmatrix} 2\gamma P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^\perp} < 0, \quad (16)$$

ou,

$$A(\alpha)^{-T} 2\gamma P(\alpha) A(\alpha)^{-1} + (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) A(\alpha)^{-1} + A(\alpha)^{-T} P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} < 0. \quad (17)$$

Multiplicando (17) à esquerda por $A(\alpha)^T$ e à direita por $A(\alpha)$, segue (18).

$$\begin{aligned} & A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \\ & + P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) + 2\gamma P(\alpha) < 0, \quad (18) \\ & \Leftrightarrow A_N^T P(\alpha) + P(\alpha) A_N < -2\gamma P(\alpha). \end{aligned}$$

Note que a desigualdade (18) é equivalente a desigualdade (II), substituindo a matriz de Lyapunov Q por $P(\alpha)^{-1}$, com $\alpha_i \in \mathcal{M}$. Logo, quando a LMI (11b) é factível, o sistema (7), considerando o Lema 2.1, satisfaz a desigualdade (II).

(Parte 2 - LMI (11c)) Os dois primeiros passos da prova da LMI (11c) são semelhantes aos dois primeiros passos da prova da LMI (11b). Em seguida, do item (iv) do Lema 2.1, a desigualdade (11c) pode ser reescrita como (19).

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} -rP(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & P(\alpha) & -rP(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \\ & + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} Z \\ Z \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -I - B(\alpha)K_d & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Agora, note que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0_{n \times n}$ com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}. \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & \cos(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \\ \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\cos(\theta)P(\alpha) \\ \cos(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & -\cos(\theta)P(\alpha) & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)Z & -\cos(\theta)Z \\ \text{sen}(\theta)Z & -\cos(\theta)Z \\ \cos(\theta)Z & \text{sen}(\theta)Z \\ \cos(\theta)Z & \text{sen}(\theta)Z \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha) & -(I + B(\alpha)K_d) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -(I + B(\alpha)K_d) & A(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)} \right\} < 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Agora, note que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)^\perp = 0_{n \times n}$ com

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \\ 0_{n \times n} & A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Pelo item (ii) do Lema 2.1 a equivalência é estabelecida

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(\alpha)^\perp{}^T \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & \cos(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \\ \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & -\cos(\theta)P(\alpha) \\ \cos(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \text{sen}(\theta)P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & -\cos(\theta)P(\alpha) & \text{sen}(\theta)P(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \\ & \times \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \\ 0_{n \times n} & A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^\perp} < 0, \quad (26) \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) A(\alpha)^{-1} + \text{sen}(\theta)A(\alpha)^{-T} P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \\ \cos(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) A(\alpha)^{-1} - \cos(\theta)A(\alpha)^{-T} P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta)A(\alpha)^{-T} P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} - \cos(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) A(\alpha)^{-1} \\ \text{sen}(\theta)A(\alpha)^{-T} P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} + \cos(\theta)(I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) A(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (27) \end{aligned}$$

Pelo item (ii) do Lema 2.1 a equivalência é estabelecida

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp{}^T \times \underbrace{\begin{bmatrix} -rP(\alpha) & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & P(\alpha) \\ 0_{n \times n} & P(\alpha) & -rP(\alpha) \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}(\alpha)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} A(\alpha)^{-1} & 0_{n \times n} \\ (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}(\alpha)^\perp} < 0, \quad (21)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} -A(\alpha)^{-T} rP(\alpha) A(\alpha)^{-1} & (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \\ P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} & -rP(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

Multiplicando (22) à esquerda por $\text{diag}(A(\alpha)^T, I)$ e à direita por $\text{diag}(A(\alpha), I)$, segue (23).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -rP(\alpha) & A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \\ P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) & -rP(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -rP(\alpha) & A_N^T P(\alpha) \\ P(\alpha) A_N & -rP(\alpha) \end{bmatrix} < 0. \quad (23) \end{aligned}$$

Note que a desigualdade (23) é equivalente a desigualdade (III), substituindo a matriz de Lyapunov Q por $P(\alpha)^{-1}$, com $\alpha_i \in \mathcal{M}$. Logo, quando a LMI (11c) é factível, o sistema (7), considerando o Lema 2.1, satisfaz a desigualdade (III).

(Parte 3 - LMI (11d)) Os dois primeiros passos da prova da LMI (11d) são semelhantes aos dois primeiros passos da prova da LMI (11b). Em seguida, do item (iv) do Lema 2.1, a desigualdade (11d) pode ser reescrita como (24).

Multiplicando (27) à esquerda por $\text{diag}(A(\alpha)^T, A(\alpha)^T)$ e à direita por $\text{diag}(A(\alpha), A(\alpha))$, segue (28).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \left(A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) + P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) \right) \\ \cos(\theta) \left(A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) - P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) \right) \\ \cos(\theta) \left(P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) - A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \right) \\ \text{sen}(\theta) \left(P(\alpha) (I + B(\alpha)K_d)^{-1} A(\alpha) + A(\alpha)^T (I + B(\alpha)K_d)^{-T} P(\alpha) \right) \end{bmatrix} < 0, \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \left(A_N^T P(\alpha) + P(\alpha) A_N \right) & \cos(\theta) \left(P(\alpha) A_N - A_N^T P(\alpha) \right) \\ \cos(\theta) \left(A_N^T P(\alpha) - P(\alpha) A_N \right) & \text{sen}(\theta) \left(P(\alpha) A_N + A_N^T P(\alpha) \right) \end{bmatrix} < 0. \quad (28) \end{aligned}$$

Note que a desigualdade (28) é equivalente a desigualdade (IV), substituindo a matriz de Lyapunov Q por $P(\alpha)^{-1}$, com $\alpha_i \in \mathcal{M}$. Logo, quando a LMI (11d) é factível, o sistema (7), considerando o Lema 2.1, satisfaz a desigualdade (IV). \square

A eficiência da metodologia proposta é ilustrada na solução do exemplo numérico a seguir.

4 Exemplo - Sistema de suspensão ativa de um veículo

Considere o sistema de suspensão ativa dado na Figura 2 (Reithmeier and Leitmann, 2003).

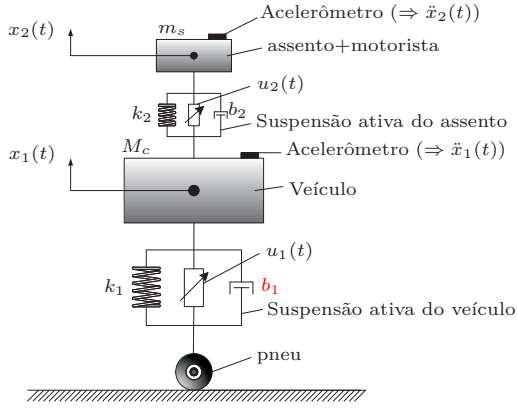


Figura 2: Sistema de suspensão ativa de um veículo.

O modelo dinâmico pode ser representado pelo sistema incerto (1), considerando:

$$[A; B](\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ -\frac{k_1 - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & -\frac{b_1 - b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} & \vdots & \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & -\frac{k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & -\frac{b_2}{m_s} & \vdots & 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

O vetor de estados é definido por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$, sendo que $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$.

O sistema consiste em um veículo de massa M_c , um assento e uma pessoa, cuja massa total é m_s . As vibrações causadas por irregularidades na estrada podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão do veículo (mola k_1 e amortecedor b_1). Mesmo assim, o motorista ainda pode sentir um pouco de vibrações. Uma maneira de melhorar o conforto do motorista é instalar um sistema de suspensão ativa no seu assento (mola k_2 e amortecedor b_2). Desta forma, pode-se diminuir as vibrações entre o motorista (m_s) e o chassi do veículo (M_c), modificando as entradas de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Considere $M_c = 1500\text{kg}$, $m_s = 120\text{(kg)}$ (motorista + assento (20kg)), $b_2 = 500\text{Ns/m}$, $k_1 = 4 \times 10^4\text{N/m}$ e $k_2 = 5 \times 10^3\text{N/m}$ (da Silva et al., 2011a). Ainda, suponha que o amortecedor do veículo esteja sujeito a uma falha estrutural, de tal forma que $b_1 = 2 \times 10^3\text{Ns/m}$ enquanto o amortecedor está funcionando normalmente e $b_1 = 0$ após uma eventual quebra do amortecedor. Ou seja, o parâmetro b_1 é incerto e pertence ao intervalo $0 \leq b_1 \leq 2 \times 10^3\text{(Ns/m)}$.

Para a solução numérica das LMIs foi utilizado o software MatLab[®] e o solver “SeDuMi” (Sturm, 1999). As LMIs do Teorema 3.1 foram resolvidas considerando $\gamma = 0,99$, $r = 2$ e $\theta = 45^\circ$, e o seguinte ganho robusto foi projetado:

$$K_d = 10^4 \times \begin{bmatrix} 5,2868 & -0,0347 & 1,7180 & -0,0311 \\ -0,5760 & 0,5760 & -0,2038 & 0,1917 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

O comportamento dinâmico do sistema (29), para a condição inicial de simulação $x(0) = [0,1 \ 0,3 \ 0 \ 0]^T$ e considerando o ganho K_d na entrada de controle (5), pode ser visto na Figura 3.

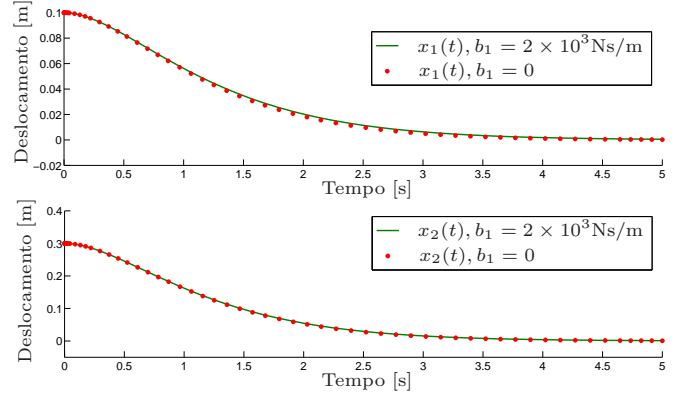


Figura 3: Resposta transitória com K_d .

Pela Figura 3, nota-se que o controlador robusto projetado foi capaz de garantir estabilidade ao sistema de suspensão ativa mesmo com a ocorrência de uma falha no amortecedor. A Figura 4 exibe a localização dos autovalores dos vértices do sistema na região $S(\gamma = 0,99, r = 2, \theta = 45^\circ)$.

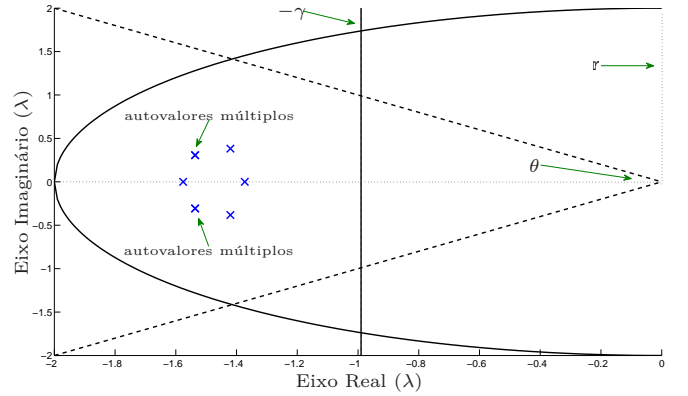


Figura 4: Localização dos autovalores dos vértices do sistema (29), realimentado com (30) (x).

Observando a Figura 4, verifica-se que os autovalores do sistema controlado têm parte real menor que $-\gamma = -0,99$, módulo menor que $r = 2$ e os argumentos pertencem ao intervalo $[135^\circ, 225^\circ]$, definido pelo ângulo $\theta = 45^\circ$. Logo, o sistema é \mathcal{D} -estável na região $S(\gamma, r, \theta)$.

NOTA: Em exemplos testados, através de simulações digitais, não foi possível obter valores de $\gamma > 0,99$.

5 Conclusões

Condições suficientes baseadas em LMIs para o projeto de controladores de sistemas lineares incertos, ou sujeitos a falhas estruturais, usando a realimentação derivativa foram propostas. O procedimento garante a \mathcal{D} -estabilidade robusta de autovalores em uma região preestabelecida em projeto. Ainda, o emprego de uma PDLF consegue-se, na maior parte dos casos, resultados menos conservadores comparada com o método utilizando uma CQLF. A técnica de controle proposta é particularmente interessante para a aplicação em sistemas mecânicos, onde

sensores como acelerômetros têm sido utilizados para medir os estados desses sistemas.

Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de fomento CNPq¹ e FAPESP² (Processo: 2012/12945-7 vinculado ao Projeto Temático processo: 2011/17610-0) pelo apoio a este trabalho.

Referências

- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2004). Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback, *IEE Proceedings-Control Theory Applications* **151**(4): 377–385.
- Apkarian, P., Tuan, H. D. and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities LMI characterizations, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **46**(12): 1941–1946.
- Assunção, E., Faria, F. A. and Teixeira, M. C. M. (2008). \mathcal{D} -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados, *XVII Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2008*, Juiz de Fora-MG, p. 7 páginas. Artigo ID 38448.
- Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A., da Silva, N. A. P. and Cardim, R. (2007). Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems, *International Journal of Control* **80**(8): 1260–1270.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 15, 2 edn, SIAM Studies in Applied Mathematics.
- Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Covacic, M. R. (2007). Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design, *3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Vol. 1, Iguassu Falls, Brazil, pp. 135–141.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- da Silva, E. R. P., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and Buzachero, L. F. S. (2012). Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback, *Mathematical Problems in Engineering* vol. **2012**: 21 pages. Article ID 315049.
- da Silva, E. R. P., Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A. and Buzachero, L. F. S. (2011a). Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems, *International Journal of Control* **84**(8): 1377–1386.
- da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Faria, F. A. (2011b). Estabilização de sistemas fuzzy T-S incertos usando realimentação derivativa, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática* pp. 273 – 283.
- Dahleh, M. and Dahleh, M. A. (1991). On slowly time-varying systems, *Automatica* **27**(1): 201 – 205.
- Duan, Y. F., Ni, Y. Q. and Ko, J. M. (2005). State-derivative feedback control of cable vibration using semiactive magnetorheological dampers, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* **20**(6): 431–449.
- Ebihara, Y. and Hagiwara, T. (2004). New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis, *Automatica* **40**(11): 2003–2009.
- Faria, F. A., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and Cardim, R. (2010). Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems, *Mathematical Problems in Engineering* vol. **2010**: 15 pages. Article ID 927362.
- Faria, F. A., Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and da Silva, N. A. P. (2009). Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems, *International Journal of Control* **82**(1): 1–12.
- Kwak, S. K., Washington, G. and Yedavalli, R. K. (2002a). Acceleration-based vibration control of distributed parameter systems using the “reciprocal state-space framework”, *Journal of Sound and Vibration* **251**(3): 543–557.
- Kwak, S. K., Washington, G. and Yedavalli, R. K. (2002b). Acceleration feedback-based active and passive vibration control of landing gear components, *Journal of Aerospace Engineering* **15**(1): 1–9.
- Leite, V. J. d. S., Montagner, V. F. and Peres, P. L. D. (2004). Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática* **15**: 127 – 134.
- Michiels, W., Vyhldal, T., Huijberts, H. and Nijmeijer, H. (2009). Stabilizability and stability robustness of state derivative feedback controllers, *SIAM Journal on Control and Optimization* **47**(6): 3100–3117.
- Ogata, K. (2003). *Engenharia de controle moderno*, 4 edn, Prentice Hall, New York.
- Reithmeier, E. and Leitmann, G. (2003). Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state, *Archive of Applied Mechanics* **72**(11–12): 856–864.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. and Grigoriadis, K. M. (1998). *A unified algebraic approach to linear control design*, Taylor & Francis systems and control book series, Taylor & Francis, Bristol, PA, London, UK.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.

¹Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

²Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.