REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA $\mathscr{H}_2$ PARA SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A SALTOS MARKOVIANOS DISCRETOS NO TEMPO COM MATRIZES DE PROBABILIDADE INCERTAS POR MEIO DE LMIS COM PARÂMETROS ESCALARES

CECÍLIA F. MORAIS*, MÁRCIO F. BRAGA*, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*, PEDRO L. D. PERES*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.

Emails: {cfmorais,marciofb,ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br, , ,

Abstract— This paper investigates the problem of $\mathscr{H}_2$ static output feedback control design for discrete-time Markov jump linear systems (MJLS), assuming that the transition probability matrix is affected by some kind of uncertainty (polytopic, bounded or completely unknown elements), modeled in terms of the Cartesian product of simplexes, called multi-simplex. The proposed synthesis conditions, based on linear matrix inequality relaxations with parameter-dependent Lyapunov matrices, are performed in two steps: the first step generates a parameter-dependent state feedback controller that is employed as an input for the second stage, which synthesizes a robust static output feedback gain assuring an $\mathscr{H}_2$ guaranteed cost. The proposed strategy can also cope with $\mathscr{H}_2$ state feedback control for discrete-time MJLS. A numerical example illustrates the applicability of the proposed method.

Keywords— Markov Jump Linear systems, Discrete-time systems, Static output feedback, $\mathscr{H}_2$ norm, LMI relaxations.

Resumo— Esse artigo investiga o problema de projeto de controladores $\mathscr{H}_2$ por realimentação estática de saída para sistemas lineares a saltos markovianos discretos no tempo, assumindo que a matriz de probabilidades de transição é afetada por algum tipo de incerteza (politópica, com elementos limitados ou completamente desconhecidos), modelada em termos do produto cartesiano de simplexos, chamado multi-simplex. As condições de síntese propostas, baseadas em desigualdades matriciais lineares com matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros, são realizadas em dois passos: no primeiro é projetado um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros, o qual é usado como entrada no segundo estágio para produzir um ganho estático e robusto de realimentação de saída com custo garantido $\mathscr{H}_2$. A estratégia apresentada pode ser adaptada para tratar o problema de controle robusto $\mathscr{H}_2$ por realimentação de estados. Um exemplo numérico ilustra a aplicabilidade do método proposto.

Palavras-chave— Sistemas lineares a saltos markovianos, Sistemas discretos no tempo, Realimentação estática de saída, Norma $\mathscr{H}_2$, Relaxações LMIs.

1 Introdução

Um dos principais objetivos da teoria de controle é desenvolver técnicas de projeto de controladores que, em malha fechada, forneçam estabilidade e bom desempenho seguindo algum critério tal como a norma $\mathscr{H}_2$. Muitos casos da literatura assumem que os estados dos sistemas estão completamente acessíveis, porém em situações práticas geralmente são utilizadas técnicas de controle por realimentação estática de saída (Syrmos et al., 1997; de Oliveira et al., 2002), as quais reduzem os custos do projeto por demandarem menos sensores. Embora a maioria dos estudos aborde sistemas lineares, variações abruptas, mudanças no ponto de operação, distúrbios ambientais e falhas de componentes comuns aos sistemas dinâmicos práticos exigem um tratamento mais adequado. Tais plantas podem ser apropriadamente modeladas, por exemplo, por meio de uma classe de sistemas estocásticos híbridos conhecida como sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos (do inglês, *Markovian Jump Linear Systems* – MJLS), cujas aplicações, condições de estabilidade e problemas de controle ótimo podem ser encontrados na literatura (Boukas, 2005; Costa et al., 2005).

MJLS discretos no tempo são descritos por um conjunto de equações a diferenças que dependem de uma variável aleatória que evolui de acordo com uma cadeia de Markov associada à matriz de probabilidades de transição (MPT) que governa os saltos. Em problemas práticos, há dificuldade em obter informações exatas relacionadas às probabilidades, em geral com alto custo. Por conseguinte, muitos pesquisadores assumem que a MPT é incerta e pertence a um domínio politópico (Oliveira et al., 2009), ou parcialmente desconhecida com limitantes conhecidos (Ma et al., 2011), ou simplesmente parcialmente conhecida, sem assumir qualquer informação relacionada aos elementos incertos (Zhang e Boukas, 2009).

O objetivo deste artigo é propor condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) para o controle estático de saída $\mathscr{H}_2$ de MJLS discretos com MPTs incertas. As incertezas que afetam cada linha da MPT são modeladas em termos de parâmetros pertencentes ao simplex unitário, de forma que o conjunto completo de parâmetros incertos pertença ao produto cartesiano de simplexos, chamado multi-simplex (Oliveira et al., 2008). Seguindo uma estratégia proposta em (Peaucelle e Arzelier, 2001; Arzelier et al., 2003; Mehdi et al., 2004) para sistemas politópicos, o projeto de controladores estáticos $\mathscr{H}_2$ por realimentação de saída é realizado em dois passos: no primeiro um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros é sintetizado em termos de LMIs, a seguir esse controlador é utilizado como entrada no segundo estágio, no qual um controlador robusto de realimentação de saída com custo garantido $\mathscr{H}_2$ pode ser determinado. Esse método é capaz de trabalhar com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros de graus arbitrários que, em conjunto com a busca em um parâmetro escalar no primeiro estágio, podem reduzir significativamente o conservadorismo das condições de síntese. Um experimento numérico ilustra a aplicabilidade da técnica proposta.

2 Preliminares

Define-se $\mathbb{R}^n$ como o espaço Euclidiano de n-ésima dimensão com $\|\cdot\|$ representando a notação usual de norma e $\mathbb{K} \triangleq \{1,\ldots,\sigma\}$ como um conjunto finito contendo os modos do sistema. O conjunto de números naturais é representado por $\mathbb{N}$. Considere que $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_k\}, \Gamma)$ denote o espaço de probabilidades fundamental e que $\{\theta(k);\ k \geq 0\}$ represente a cadeia de Markov homogênea discreta no tempo tendo $\Gamma = [p_{ij}]$, $\forall i, j \in \mathbb{K}$ como a matriz de probabilidades de transição, com

$$p_{ij} = \Pr(\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i), \quad \forall k \geq 0.$$

A distribuição de probabilidades da cadeia de Markov no instante inicial é dada por $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_\sigma\}$ de forma que $(\theta(0) = i) = \mu_i$. Define-se ℓ_2^m como o espaço de Hilbert formado pelo processo estocástico $z = \{z(k);\ k \geq 0\}$ tal que $\forall k \geq 0$, e

$$\| z \|_2^2 \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{E}\left[\|z(k)\|^2\right] < \infty,$$

em que $\mathscr{E}[\cdot]$ representa a esperança matemática.

Considere o MJLS discreto ($\mathscr{G}$) definido por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + E(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta_k)x(k) + D_z(\theta_k)u(k) + E_z(\theta_k)w(k) \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \\ k &\geq 0, \quad w \in \ell_2^m, \quad \mathscr{E}\left[\|x(0)\|^2\right] < \infty, \quad \theta_0 \sim \mu. \end{aligned} \tag{1}$$

sendo que $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ representa os estados, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ contém as entradas de ruídos, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada e $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida. As matrizes do sistema $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_{zi} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, $D_{zi} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$, $E_{zi} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$, $C_{yi} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $E_{yi} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, são dadas e, para facilitar a notação, sempre que possível, $\theta(k)$ será substituído por i, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Uma definição que generaliza o conceito de estabilidade aplicada a MJLS é a estabilidade por média quadrática (do inglês, *Mean Square Stability* – MSS), a qual assegura que $\mathscr{E}[\|x(k)\|] \to 0$ quando $k \to \infty$ para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\theta_0 \in \mathbb{K}$. Condições necessárias e suficientes para a MSS foram provadas em Costa et al. (2005).

Com relação à matriz de probabilidades de transição $\Gamma = [p_{ij}]$, esse artigo considera um cenário em que a mesma pode ser afetada por diferentes tipos de incertezas. De maneira similar a Boukas (2009), cada elemento p_{ij} pode variar entre dois limitantes, i.e., $0 \leq \underline{p}_{ij} \leq p_{ij} \leq \overline{p}_{ij} \leq 1$, ou, como em Zhang e Boukas (2009), algumas entradas são completamente desconhecidas, i.e., $p_{ij} =?$. Note que a última situação pode ser vista como um caso particular da hipótese de limitantes conhecidos, uma vez que os limites mínimo e máximo de cada elemento podem ser inferidos, respectivamente, por $\underline{p}_{ij} = 0$ e $\overline{p}_{ij} = 1 - \sum_{j \in \mathbb{C}_i} p_{ij}$, em que $\mathbb{C}_i$ contém os índices das colunas com elementos conhecidos na i-ésima linha.

A fim de construir uma representação genérica que possa considerar todos os tipos de incertezas, cada linha de Γ com qualquer tipo de incerteza é modelada por parâmetros incertos pertencentes a um simplex unitário (Λ_{N_r}) dado por

$$\Lambda_{N_r} \triangleq \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N_r} : \sum_{i=1}^{N_r} \zeta_i = 1,\ \zeta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N_r \right\}.$$

Após definir todos os vértices, os parâmetros de cada linha são combinados em um único domínio, criado pelo produto cartesiano de m simplexos unitários $\Lambda = \Lambda_{N_1} \times \cdots \times \Lambda_{N_m}$, chamado multi-simplex (Oliveira et al., 2008). A extensão do Lema 5 de do Val et al. (2002) para o domínio multi-simplex, que possibilita o cálculo de um custo garantido $\mathscr{H}_2$ para um MJLS com matriz de probabilidades de transição incerta $\Gamma(\alpha)$, é apresentada no seguinte lema.

Lema 1 *O sistema* (1), *com B_i e D_{zi} identicamente nulas, é robustamente MSS e $\|\mathscr{G}\|_2^2 < \rho$ se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas dependentes de parâmetros $P_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i = 1, \ldots, \sigma$, tais que as desigualdades dependentes de parâmetros*

$$\sum_{j=1}^{\sigma} \mu_j\, Tr \left(E_j^T \left(\sum_{\ell=1}^{\sigma} p_{j\ell}(\alpha) P_\ell(\alpha) \right) E_j + E_{zj}^T E_{zj} \right) < \rho \tag{2}$$

$$A_i^T \left(\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) P_j(\alpha) \right) A_i - P_i(\alpha) + C_{zi}^T C_{zi} < 0 \tag{3}$$

sejam verificadas para cada $i = 1, \ldots, \sigma$ e para todo $\alpha \in \Lambda$. Minimizando ρ sob as restrições (2) *e* (3), *a norma $\mathscr{H}_2$ de pior caso do sistema $\mathscr{G}$ pode ser calculada.*

O cálculo da norma $\mathscr{H}_2$ de pior caso do sistema $\mathscr{G}$ com incertezas na matriz de probabilidades e B_i e D_{zi} nulas é um problema de dimensão infinita baseado em LMIs dependentes de parâmetros, pois as condições devem ser satisfeitas para todo $\alpha \in \Lambda$. Em Bliman (2004) foi provado que LMIs dependendo continuamente de parâmetros pertencentes a um conjunto compacto sempre admitem uma solução que é polinomial de grau arbitrário g nos parâmetros, quando uma solução existe. Especificamente no caso de parâmetros pertencentes ao domínio multi-simplex Λ, a solução pode ser aproximada por um polinômio homogêneo de graus parciais suficientemente grandes g_r, $r = 1, \ldots, m$, sem perda de generalidade (Oliveira et al., 2008).

A notação e definições relacionadas aos polinômios homogêneos no multi-simplex utilizadas neste artigo seguem as mesmas linhas apresentadas em Oliveira et al. (2008, Seção IV). Além disso, as condições LMIs propostas requerem uma representação polinomial homogênea da matriz[1]

[1] Em http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/programs/Gamma_alpha_sbai2013.pdf, uma explicação mais detalhada a respeito do procedimento de cômputo dos vértices de $\Gamma(\alpha)$ e uma rotina em Matlab podem ser obtidas.

$\Gamma(\alpha)$ com grau um em Λ_{N_r}, $r = 1,\ldots,m$. Para essa finalidade, a s-ésima coluna (transposta) e a s-ésima linha de cada coeficiente matricial de índice (v) de uma matriz de probabilidade incerta são agrupadas como

$$\Gamma_s^{(v)} = \begin{bmatrix} p_{1s}^{(v)}\mathrm{I}_n & \cdots & p_{\sigma s}^{(v)}\mathrm{I}_n \end{bmatrix}, \ \Upsilon_s^{(v)} = \begin{bmatrix} p_{s1}^{(v)}\mathrm{I}_n & \cdots & p_{s\sigma}^{(v)}\mathrm{I}_n \end{bmatrix}$$

em que $v \in \mathscr{K}_N(1) = \mathscr{K}_{N_1}(1) \times \ldots \times \mathscr{K}_{N_m}(1)$, 1 é definido como $1 = (1,\ldots,1)$, com m elementos, e o coeficiente $\pi(k)$ como o produto dos fatoriais dos componentes

$$\pi(k) = (k_{11}!)\cdots(k_{1N_1}!)\cdots(k_{m1}!)\cdots(k_{mN_m}!).$$

Quando considera-se $P_i(\alpha)$ de grau g_r para cada $i = 1\ldots\sigma$ e $r = 1\ldots m$, o seguinte coeficiente matricial é usado $\mathscr{X}_k = \begin{bmatrix} P_{1_k} & P_{2_k} & \cdots & P_{\sigma_k} \end{bmatrix}^T$.

Embora as condições no Lema 1 sejam de dimensão infinita, um procedimento sistemático baseado em uma sequência de problemas LMIs pode ser construído para buscar por soluções polinomiais homogêneas de grau arbitrário no multi-simplex (Oliveira et al., 2008), conforme apresentado na seção seguinte.

3 Resultados principais

O seguinte teorema apresenta condições LMIs suficientes com um parâmetro escalar, obtidas por meio do Lema da Projeção (Boyd et al., 1994; Pipeleers et al., 2009), para a existência de um ganho de realimentação de estados dependente de modo e dependente de parâmetros que assegura a MSS robusta para o sistema (1) com matriz de probabilidades de transição incerta.

Teorema 1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_{i_k} \in \mathrm{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathscr{K}_N(g)$, matrizes $X_i \in \mathrm{R}^{n_x \times n_x}$, $Z_{i_k} \in \mathrm{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathscr{K}_N(g_\kappa)$, $i = 1,\ldots,\sigma$, graus $g = (g_1,\ldots,g_m) \in \mathrm{N}^m$ e $g_\kappa = (g_{\kappa 1},\ldots,g_{\kappa m}) \in \mathrm{N}^m$, $w = max\{g+1, g_\kappa+1\}$, e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1,1)$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas para cada $i = 1,\ldots,\sigma$,*

$$M_k = M_{k\check{k}} + M_{kk'\tilde{k}} > 0, \quad \forall k \in \mathscr{K}_N(w) \tag{4}$$

em que, $M_{k\check{k}}$ é dado por

$$\sum_{\substack{\check{k} \in \mathscr{K}_N(w-g_\kappa) \\ k \geq \check{k}}} \frac{\prod_{j=1}^{m} (w_j - g_{\kappa j})!}{\pi(\check{k})} \begin{bmatrix} -\xi\left(B_i Z_{i_{k-\check{k}}} + Z_{i_{k-\check{k}}}^T B_i^T\right) & \star \\ B_i Z_{i_{k-\check{k}}} & 0 \end{bmatrix}$$

e, $M_{kk'\tilde{k}}$, por

$$\sum_{\substack{k' \in \mathscr{K}_N(w-g-1) \\ k \geq k'}} \ \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathscr{K}_N(1) \\ k \geq k'+\tilde{k}}} \frac{\prod_{j=1}^{m} (w_j - g_j - 1)!}{\pi(k')} \times$$
$$\begin{bmatrix} P_{i_{k-k'-\tilde{k}}} - \lambda_{k,\ell}\left(A_i X_i + X_i^T A_i^T\right) & \star \\ \lambda_{k,\ell}\left(A_i X_i - \xi X_i^T\right) & \lambda_{k,\ell}\left(X_i + X_i^T\right) - \Gamma_i^{(\tilde{k})} \mathscr{X}_{k-k'-\tilde{k}} \end{bmatrix}$$

com

$$\lambda_{k,\ell} \quad = \prod_{j=1}^{m}\left(g_j!(k_{j_\ell} - k'_{j_\ell})\right)/\pi(k-k'). \tag{5}$$

então o sistema (1) é estabilizável por média quadrática por uma lei de controle dependente de modo e de parâmetros $u(k) = K_i(\alpha)x(k) = Z_i(\alpha)X_i^{-1}x(k)$.

Prova: Usando as seguintes notações $P_i(\alpha) = P_i^T(\alpha)$, $Z_i(\alpha)$ e $\sum_{j=1}^{\sigma} p_{ji}(\alpha)P_j(\alpha) = P_{pi}(\alpha)$, $A_{sf_i} = A_i + B_i Z_i(\alpha) X_i^{-1}$, $i = 1,\ldots,\sigma$, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P_i(\alpha) & 0 \\ 0 & P_{pi}(\alpha) \end{bmatrix}}_{Q} + \begin{bmatrix} A_{sf_i} \\ -I \end{bmatrix} X_i \underbrace{\begin{bmatrix} \xi I & I \end{bmatrix}}_{V}$$
$$+ \begin{bmatrix} \xi I \\ I \end{bmatrix} X_i^T \underbrace{\begin{bmatrix} A_{sf_i}^T & -I \end{bmatrix}}_{U} < 0$$

que é (4), multiplicada por α^k e somada para $k \in \mathscr{K}_N(w)$. Tais condições são equivalentes, pelo Lema da Projeção (Boyd et al., 1994; Pipeleers et al., 2009), a

$$\begin{bmatrix} I \\ A_{sf_i}^T \end{bmatrix}^T Q \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ A_{sf_i}^T \end{bmatrix}}_{N_U} = A_{sf_i} P_{pi}(\alpha) A_{sf_i}^T - P_i(\alpha) < 0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix}^T Q \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -\xi I \end{bmatrix}}_{N_V} = \xi^2 P_{pi}(\alpha) - P_i(\alpha) < 0, \tag{7}$$

para $i = 1,\ldots,\sigma$, em que (6) assegura a estabilidade por média quadrática em malha fechada do MJLS discreto no tempo (Costa et al., 2005) e, desenvolvendo (7) para todo i, somando todos os resultados e usando o fato que $\sum_{i=1}^{\sigma} p_{ij}(\alpha) = 1$, têm-se os limitantes do parâmetro escalar

$$(-1+\xi^2)\sum_{i=1}^{\sigma} P_i(\alpha) < 0, \quad \forall \xi \in (-1,1). \tag{8}$$

De forma que, se (4) é válida, então (6), (7) e (8) são verificadas, e isso significa que o sistema é MSS em malha fechada e $\xi \in (-1,1)$. □

Note que o parâmetro escalar ξ representa um grau de liberdade na busca por uma solução factível. Por exemplo, pode-se testar um conjunto de valores dados ou mesmo realizar uma busca unidimensional em ξ.

Outra importante observação é que o Teorema 1 provê um ganho dependente de parâmetros. Caso seja requerido um ganho robusto (independente de parâmetros), basta escolher os graus parciais g_{κ_r} identicamente nulos. Contudo, os ganhos de realimentação de estados dependentes de parâmetros representam uma maior família de controladores estabilizantes a serem usados como entrada para o segundo passo do procedimento de busca de um ganho de realimentação de saída estático e robusto com um custo garantido $\mathscr{H}_2$, aumentando as chances de encontrar uma solução.

Teorema 2 *Dados ganhos estabilizantes* $K_{ik} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $k \in \mathscr{K}_N(g_\kappa)$, *com* $g_\kappa = (g_{\kappa 1}, \dots, g_{\kappa m}) \in \mathbb{N}^m$, $i = 1, \dots, \sigma$, *soluções do Teorema 1, se existirem matrizes simétricas definidas positivas* $P_{i_k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $W_{i_k} \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$, *matrizes* G_{i_k} *e* $J_{i_k} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathscr{K}_N(g)$, $F_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $H_i \in \mathbb{R}^{n_w \times n_x}$ *e* $R_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, $i = 1, \dots, \sigma$, *um grau* $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathbb{N}^m$ *e* $w = max\{(g + g_\kappa), (g+1)\}$ *tais que as seguintes LMIs sejam verificadas, para* $i = 1, \dots, \sigma$,

$$\sum_{j=1}^{\sigma} Tr\left(W_{j_k}\right) - \frac{\prod_{r=1}^{m} g_r!}{\pi(k)}\rho < 0, \quad \forall k \in \mathscr{K}_N(g) \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathscr{K}_N(1) \\ k \geq \tilde{k}}} M_{k\tilde{k}} < 0, \quad \forall k \in \mathscr{K}_N(g+1) \quad (10)$$

e

$$V_k = V_{kk'} + V_{kk'\bar{k}} + V_{kk'\tilde{k}} < 0, \quad \forall k \in \mathscr{K}_N(w) \quad (11)$$

em que $M_{k\tilde{k}}$ *de* (10) *é dado por*

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \star & \star & \star \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} & \star & \star \\ \Theta_{13} & \sqrt{\mu_i} B_i^T J_{i_{k-\tilde{k}}}^T & -\eta_{k,\ell}\left(Y_i + Y_i^T\right) & \star \\ \eta_{k,\ell}\sqrt{\mu_i} E_{zi} & 0 & \eta_{k,\ell}\sqrt{\mu_i} D_{zi} & -\eta_{k,\ell} I \end{bmatrix}$$

com[2]

$$\Theta_{11} = -W_{i_{k-\tilde{k}}} + \eta_{k,\ell}\left(\sqrt{\mu_i} E_i^T H_i^T + \sqrt{\mu_i} H_i E_i\right)$$
$$\Theta_{12} = -\eta_{k,\ell} H_i^T + \sqrt{\mu_i} J_{i_{k-\tilde{k}}} E_i$$
$$\Theta_{13} = \eta_{k,\ell}\left(\sqrt{\mu_i} B_i^T H_i^T + R_i E_{y_i}\right)$$
$$\Theta_{22} = \Upsilon_i^{(\tilde{k})} \mathscr{X}_{k-\tilde{k}} - G_{i_{k-\tilde{k}}} - G_{i_{k-\tilde{k}}}^T$$
$$\eta_{k,\ell} = \prod_{j=1}^{m}\left(g_j!(k_{j_\ell})\right)/\pi(k).$$

e os elementos que constituem (11) *são dados por*

$$V_{kk'} = \sum_{\substack{k' \in \mathscr{K}_N(w-g_\kappa) \\ k \geq k'}} \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(w_j - g_{\kappa j}\right)!}{\pi(k')} \times \begin{bmatrix} F_i B_i K_{i_{k-k'}} + K_{i_{k-k'}}^T B_i^T F_i^T & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ -Y_i K_{i_{k-k'}} & 0 & 0 & \star \\ D_{zi} K_{i_{k-k'}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_{kk'\bar{k}} = \sum_{\substack{k' \in \mathscr{K}_N(w-g-g_\kappa) \\ k \geq k'}} \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathscr{K}_N(g_\kappa) \\ k \geq k' + \bar{k}}} \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(w_j - g_j - g_{\kappa_j}\right)!}{\pi(k')} \times \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ G_{i_{k-k'-\bar{k}}} B_i K_{i_{\bar{k}}} & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_{kk'\tilde{k}} = \sum_{\substack{k' \in \mathscr{K}_N(w-g-1) \\ k \geq k'}} \sum_{\substack{\tilde{k} \in \mathscr{K}_N(1) \\ k \geq k' + \tilde{k}}} \frac{\prod_{j=1}^{m}\left(w_j - g_j - 1\right)!}{\pi(k')} \times \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \star & \star & \star \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \star & \star \\ \Phi_{13} & B_i^T G_{i_{k-k'-\tilde{k}}}^T & -\lambda_{k,\ell}\left(Y_i + Y_i^T\right) & \star \\ \lambda_{k,\ell} C_{zi} & 0 & \lambda_{k,\ell} D_{zi} & -\lambda_{k,\ell} I \end{bmatrix}$$

com

$$\Phi_{11} = -P_{i_{k-k'-\tilde{k}}} + \lambda_{k,\ell}\left(A_i^T F_i^T + F_i A_i\right)$$
$$\Phi_{12} = -\lambda_{k,\ell} F_i^T + G_{i_{k-k'-\tilde{k}}} A_i$$
$$\Phi_{13} = \lambda_{k,\ell}\left(B_i^T F_i^T + R_i C_{y_i}\right)$$
$$\Phi_{22} = \Upsilon_i^{(\tilde{k})} \mathscr{X}_{k-k'-\tilde{k}} - G_{i_{k-k'-\tilde{k}}} - G_{i_{k-k'-\tilde{k}}}^T.$$

então, a lei de controle por realimentação de saída estática dependente de modos dada por $u(k) = L_i\, y(k) = Y_i^{-1} R_i\, y(k)$ *estabiliza robustamente o sistema* (1). *Adicionalmente,* $\sqrt{\rho}$ *é um custo garantido para a norma* $\mathscr{H}_2$ *do sistema em malha fechada.*

Prova: Primeiramente, note que com $P_i(\alpha) = P_i^T(\alpha)$, $W_i(\alpha) = W_i^T(\alpha)$, $K_i(\alpha)$, $J_i(\alpha)$, $G_i(\alpha)$, F_i, H_i, Y_i, R_i, $P_{pi}(\alpha)$, L_i, A_{sf_i}, previamente definidas, e

$$A_{of_i} = A_i + B_i L_i C_{y_i}, \quad C_{of_i} = C_{zi} + D_{zi} L_i C_{y_i},$$
$$E_{of_i} = E_i + B_i L_i E_{y_i}, \quad E_{zof_i} = E_{zi} + D_{zi} L_i E_{y_i},$$
$$C_{sf_i} = C_{zi} + D_{zi} K_i(\alpha),$$
$$\Psi_{11}(\alpha) = -W_i(\alpha) + \sqrt{\mu_i}\left(E_i^T H_i^T + H_i E_i\right)$$

$i = 1, \dots, \sigma$, tem-se (12) que é (10) multiplicada por α^k e somada para todo $k \in \mathscr{K}_N(g+1)$, com $T_i = Y_i^{-1} R_i E_{y_i}$. Escolhendo

$$N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ T_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

tem-se que (12) é equivalente, pelo Lema da Projeção (Boyd et al., 1994; Pipeleers et al., 2009), a

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -W_i(\alpha) + \sqrt{\mu_i}\,(E_{mf_i}^T H_i^T \\ +H_i E_{mf_i}) \end{pmatrix} & \star & \star \\ -H_i^T + \sqrt{\mu_i} J_i(\alpha) E_{mf_i} & \begin{pmatrix} P_{pi}(\alpha) \\ -J_i(\alpha) \\ -J_i(\alpha)^T \end{pmatrix} & \star \\ \sqrt{\mu_i} E_{zmf_i} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

que é o produto de $N_V^T Q N_V$, substituindo E_{mf_i} e E_{zmf_i} respectivamente por E_{of_i} e E_{zof_i}, e também é o produto $N_U^T Q N_U$, substituindo E_{mf_i} e E_{zmf_i} por E_i e E_{zi}. Finalmente, multiplicando (13) por $\mathscr{B}^T$ à esquerda e por $\mathscr{B}$ à direita, com

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \sqrt{\mu_i} E_{mf_i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (14)$$

e aplicando o complemento de Schur tem-se

$$-W_i(\alpha) + \mu_i E_{mf_i}^T P_{pi}(\alpha) E_{mf_i} + \mu_i E_{zmf_i}^T E_{zmf_i} < 0$$

[2]Nos coeficientes multiplicativos $\eta_{k,\ell}$ e $\lambda_{k,\ell}$, o índice ℓ corresponde à posição do único elemento não nulo associado à N-upla $\tilde{k}_j \in \mathscr{K}_{N_j}(1)$.

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_{11}(\alpha) & \star & \star & \star \\ -H_i^T+\sqrt{\mu_i}J_i(\alpha)E_i & P_{pi}(\alpha)-J_i(\alpha)-J_i(\alpha)^T & \star & \star \\ \sqrt{\mu_i}B_i^TH_i^T & \sqrt{\mu_i}B_i^TJ_i(\alpha)^T & 0 & \star \\ \sqrt{\mu_i}E_{zi} & 0 & \sqrt{\mu_i}D_{zi}^T & -I \end{bmatrix}}_{Q} + \begin{bmatrix}0\\0\\I\\0\end{bmatrix}\underbrace{Y_i}_{X}\underbrace{\begin{bmatrix}T_i^T\\0\\-I\\0\end{bmatrix}^T}_{V^T} + \begin{bmatrix}T_i^T\\0\\-I\\0\end{bmatrix}Y_i^T\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\I\\0\end{bmatrix}^T}_{U^T} < 0 \tag{12}
$$

que, em conjunto com

$$
\sum_{j=1}^{\sigma} \mathrm{Tr}\ (W_j(\alpha)) < \rho, \tag{15}
$$

reproduz a condição em (2). Note que, (15) é (9) multiplicada por α^k e somada para todo $k \in \mathscr{K}_N(g)$.

Por outro lado tem-se que (16) é (11) multiplicada por α^k e somada para todo $k \in \mathscr{K}_N(w)$, com $S_i = Y_i^{-1}R_iC_{y_i} - K_i(\alpha)$. Escolhendo

$$
N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},
$$

tem-se que (16) é equivalente, pelo Lema da Projeção (Boyd et al., 1994; Pipeleers et al., 2009), a

$$
\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -P_i(\alpha)+A_{mf\,i}^TF_i^T \\ +F_iA_{mf\,i} \end{pmatrix} & \star & \star \\ -F_i^T+G_i(\alpha)A_{mf\,i} & \begin{pmatrix} P_{pi}(\alpha) \\ -G_i(\alpha) \\ -G_i(\alpha)^T \end{pmatrix} & \star \\ C_{mf\,i} & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{17}
$$

que é o produto $N_V^TQN_V$ substituindo $A_{mf\,i}$ e $C_{mf\,i}$ respectivamente por $A_{of\,i}$ e $C_{of\,i}$, e também é o produto $N_U^TQN_U$ substituindo $A_{mf\,i}$ e $C_{mf\,i}$ respectivamente por $A_{sf\,i}$ e $C_{sf\,i}$. Finalmente, multiplicando (17) por $\mathscr{B}^T$ à esquerda e $\mathscr{B}$ à direita, com

$$
\mathscr{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{mf\,i} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{18}
$$

e aplicando o complemento de Schur tem-se

$$
-P_i(\alpha) + A_{mf\,i}^TP_{pi}(\alpha)A_{mf\,i} + C_{mf\,i}^TC_{mf\,i} < 0
$$

que reproduz a condição do gramiano de observabilidade dada em (3). □

As condições do Teorema 2 podem ser diretamente adaptadas para tratar o problema de controle $\mathscr{H}_2$ por realimentação de estados robusta, bastando escolher $C_{y_i} = I$ e $E_{y_i} = 0$, $i = 1,\dots,\sigma$. O Teorema 2 também pode ser adaptado para fornecer um ganho independente de modo, neste caso, substituem-se Y_i e R_i, $\forall i \in \mathbb{K}$, por matrizes constantes Y e R. É importante enfatizar que, diferentemente de outros métodos da literatura, as condições do Teorema 2 podem empregar matrizes de Lyapunov que dependem de maneira polinomial dos parâmetros, reduzindo o conservadorismo das condições de síntese de controladores. Embora sejam somente suficientes, com o aumento de g e g_κ, tais condições podem prover ganhos que assegurem custos garantidos progressivamente menos conservadores e mais próximos das normas $\mathscr{H}_2$ de malha fechada.

4 Exemplo numérico

Essa seção apresenta a aplicação do método proposto na obtenção de um ganho estático $\mathscr{H}_2$ de saída para MJLS com matrizes de probabilidades de transição incertas. As rotinas foram implementadas em Matlab, versão 7.10 (R2010a) usando Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999).

Exemplo 1 Considere o Caso 1 do exemplo fornecido em Fioravanti et al. (2013) com MJLS discreto com quatro modos e distribuição de probabilidades inicial dada por $\mu = \begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$. O ganho obtido para o primeiro estágio com $\xi = 0$, $g = g_\kappa = (0{,}0{,}0)$ foi introduzido no segundo estágio no qual, com o emprego do grau $g = (0{,}0{,}0)$, obteve-se um controlador estático de saída com custo garantido $\mathscr{H}_2$ de $\sqrt{\rho} = 1.3201$ para o qual o valor da norma em malha fechada é de 0.7485. Melhores resultados podem ser alcançados com a variação do parâmetro escalar e aumento dos graus, nesse caso, para $\xi = -0.5$, $g_\kappa = (1{,}1{,}1)$, $g = (0{,}0{,}0)$ no Teorema 1 e $g = (1{,}1{,}1)$ no Teorema 2, o valor de $\sqrt{\rho}$ é dado por 1.1795, representando uma redução de 10,65% em relação ao custo garantido anteriormente encontrado, além disso, a norma em malha fechada para esse controlador é de 0.7028. É válido mencionar que uma melhora também é verificada na redução da diferença entre o custo garantido obtido pelo Teorema 2 e a norma de pior caso em malha fechada do sistema.

5 Conclusão

Foram propostas condições LMIs para a síntese de controladores robustos $\mathscr{H}_2$ por realimentação de saída para MJLS discretos com matrizes de probabilidades de transição incertas, cujas incertezas são modeladas usando a metodologia multi-simplex.

O método de dois estágios apresentado provê um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros no primeiro estágio que, ao ser utilizado como entrada no segundo, permite a síntese de um ganho estático e robusto por realimentação de saída com custo garantido $\mathscr{H}_2$. As condições suficientes são dadas em termos de LMIs com matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros, sendo que o primeiro estágio apresenta um grau extra de liberdade devido à

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -P_i(\alpha)+A_{sf_i}^T F_i^T + F_i A_{sf_i} & \star & \star & \star \\ -F_i^T + G_i(\alpha) A_{sf_i} & P_{pi}(\alpha) - G_i(\alpha) - G_i(\alpha)^T & \star & \star \\ B_i^T F_i^T & B_i^T G_i(\alpha)^T & 0 & \star \\ C_{sf_i} & 0 & D_{z_i} & -I \end{bmatrix}}_{Q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{Y_i}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} S_i^T \\ 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix}^T}_{V^T} + \begin{bmatrix} S_i^T \\ 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix} Y_i^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^T}_{U^T} < 0 \tag{16}$$

introdução de um parâmetro escalar pertencente ao intervalo $(-1,1)$.

Agradecimentos

Às agências FAPESP (Proc. 2011/08312-6), CAPES e CNPq.

Referências

Arzelier, D., Peaucelle, D. e Salhi, S. (2003). Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound, *Proc. 4th IFAC Symp. Robust Control Design*, Milan, Italy, pp. 425–430.

Bliman, P.-A. (2004). An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs, *Syst. Control Letts.* **51**(3-4): 165–169.

Boukas, E. K. (2005). *Stochastic Switching Systems: Analysis and Design*, Birkhäuser, Berlin, Germany.

Boukas, E. K. (2009). $\mathscr{H}_\infty$ control of discrete-time Markov jump systems with bounded transition probabilities, *Optim. Control Appl. Meth.* **30**(5): 477–494.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*, Springer-Verlag, New York, NY, USA.

de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. e Bernussou, J. (2002). Extended $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems, *Int. J. Control* **75**(9): 666–679.

do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Gonçalves, A. P. (2002). The $\mathscr{H}_2$-control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**(2): 343–349.

Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. e Geromel, J. C. (2013). Discrete-time $\mathscr{H}_\infty$ output feedback for Markov jump systems with uncertain transition probabilities, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **23**(8): 894–902.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289. http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php.

Ma, S., Zhang, C. e Zhu, S. (2011). Robust stability for discrete-time uncertain singular Markov jump systems with actuator saturation, *IET Control Theory & Appl.* **5**(2): 255–262.

Mehdi, D., Boukas, E. K. e Bachelier, O. (2004). Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems, *IMA J. Math. Control Inform.* **21**(1): 1–13.

Oliveira, R. C. L. F., Bliman, P.-A. e Peres, P. L. D. (2008). Robust LMIs with parameters in multi-simplex: Existence of solutions and applications, *Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control*, Cancun, Mexico, pp. 2226–2231.

Oliveira, R. C. L. F., Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Peres, P. L. D. (2009). Robust stability, $\mathscr{H}_2$ analysis and stabilisation of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain probability matrix, *Int. J. Control* **82**(3): 470–481.

Peaucelle, D. e Arzelier, D. (2001). An efficient numerical solution for $\mathscr{H}_2$ static output feedback synthesis, *Proc. 2001 Eur. Control Conf.*, Porto, Portugal, pp. 3800–3805.

Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Swevers, J. e Vandenberghe, L. (2009). Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems, *Syst. Control Letts.* **58**(7): 510–518.

Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. http://sedumi.ie.lehigh.edu/.

Syrmos, V. L., Abdallah, C. T., Dorato, P. e Grigoriadis, K. (1997). Static output feedback – A survey, *Automatica* **33**(2): 125–137.

Zhang, L. e Boukas, E. K. (2009). Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities, *Automatica* **45**(2): 463–468.