

DISCRETIZAÇÃO E CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS

MÁRCIO F. BRAGA*, CECÍLIA F. MORAIS*, EDUARDO S. TOGNETTI†,
RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*, PEDRO L. D. PERES*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.*

†*Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília – UnB, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.*

Emails: {marciofb, cfmorais, ricfow, peres}@dt.fee.unicamp.br, , ,
estognetti@ene.unb.br, ,

Abstract— This paper addresses the problem of discretization of polytopic time-invariant continuous-time linear systems. To circumvent the difficulty of dealing with the exponential of uncertain matrices, a new discretization method, based on Taylor series expansion, is proposed. The resulting discrete-time uncertain system is described in terms of homogeneous polynomial matrices of arbitrary degree with parameters lying in the unit simplex and an additive norm-bounded uncertainty which represents the discretization residual error. Then, linear matrix inequality (LMI) based conditions for the synthesis of a stabilizing state feedback control for discrete-time linear systems with polynomial dependence on the uncertain parameter and an additive norm-bounded term are proposed. A numerical experiment illustrates the results and the advantages of the proposed discretization technique.

Keywords— Discretized linear systems, Taylor series expansions, Polytopic uncertainty, State feedback, Linear matrix inequalities.

Resumo— Trata-se neste artigo do problema de discretização de sistemas politópicos lineares invariantes no tempo. Para evitar a dificuldade de manipular exponenciais de matrizes incertas, propõe-se um novo método de discretização, baseado em expansões de série de Taylor. O sistema resultante, incerto e discreto no tempo, é descrito em termos de matrizes polinomiais homogêneas de grau arbitrário com parâmetros pertencentes ao simplex unitário e com uma incerteza aditiva limitada em norma que representa o erro residual de discretização. Adicionalmente, apresentam-se condições LMI (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas lineares discretos com dependência polinomial nos parâmetros incertos e com um termo adicional limitado em norma. Um exemplo numérico ilustra os resultados e as vantagens da técnica de discretização proposta.

Palavras-chave— Sistemas lineares discretizados, Expansões por Séries de Taylor, Incerteza politópica, Realimentação de estados, Desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

Em sistemas de controle, a maioria dos sinais de interesse, como entradas de comando, saídas dos atuadores, leituras de sensores, é geralmente um sinal contínuo no tempo. Entretanto, com o avanço da tecnologia digital e dos computadores, o uso de controladores digitais tem sido amplamente disseminado (Ogata, 1995). De fato, os controladores digitais possuem várias vantagens quando comparados com os analógicos, como baixo custo de implementação e replicação, flexibilidade, expansibilidade e simplicidade de programação. Portanto, existe um crescente interesse na modelagem de sistemas e projeto de controladores que utilizam metodologias baseadas em tempo discreto.

Além disso, qualquer estratégia realística de modelagem ou controle deve levar em conta a presença de incertezas nos processos físicos. Tais incertezas podem ocorrer devido às variações nos parâmetros, perturbações externas, ruído associado com a coleta de informação ou medições, à precisão de sensores e atuadores, ou podem estar relacionadas às dinâmicas negligenciadas (Ackermann, 1993).

Neste artigo, que visa a síntese de controladores a tempo discreto, utiliza-se um modelo discretizado que ignora o comportamento do sistema nos intervalos entre os períodos de amostragem (veja Hara et al. (1996)

para uma discussão mais detalhada dos diversos métodos de síntese de controladores digitais). O primeiro objetivo é propor um novo procedimento de discretização com tempo de amostragem constante para sistemas politópicos incertos. Na literatura, existem poucos métodos que tratam a discretização desta classe de sistemas. Por exemplo, em Shieh et al. (1998), utiliza-se a fórmula de quadratura de Chebyshev para a modelagem de sistemas incertos contínuos cujas matrizes são intervalares. Contudo, esses métodos são apenas aproximações e a discretização exata de sistemas incertos continua sendo um problema em aberto devido à grande dificuldade de tratar com precisão exponenciais de matrizes incertas. Geralmente, os artigos encontrados na literatura, discretizam os vértices do politopo contínuo usando uma aproximação de primeira ordem de Taylor, o que gera um politopo com dependência afim nos parâmetros incertos, levando, em geral, a modelos discretos imprecisos para períodos de amostragem que não forem bem pequenos. Em seguida, uma condição de projeto de controle para sistemas discretos é empregada, como pode ser observado, por exemplo, em Kothare et al. (1996), Lee e Won (2006), mas não há nenhuma garantia de que essa lei de controle digital estabilize o sistema contínuo associado. Neste artigo, propõe-se uma técnica, baseada na expansão em séries de Taylor de grau ℓ arbitrário, que converte o sistema politópico contínuo em um equivalente dis-

creto cujas matrizes são polinomiais homogêneas de grau ℓ em parâmetros incertos pertencentes ao simplex unitário, com um termo adicional limitado em norma. Esse termo representa o erro residual de discretização, que depende do grau utilizado na expansão da série de Taylor, do tempo de amostragem e do domínio original de incerteza. Um limitante superior para o erro residual é numericamente calculado por meio de varredura exaustiva no domínio das incertezas. Além disso, o procedimento proposto é sistematizado para prover aproximações mais precisas com a elevação do grau da série de Taylor, ao preço do aumento da complexidade do sistema polinomial discreto. É importante mencionar que, diferentemente dos métodos propostos na literatura, o controlador projetado garante a estabilidade do sistema contínuo pois o erro de discretização é levado em consideração. Como contribuição adicional, propõe-se uma nova condição de projeto de controladores por realimentação de estados para sistemas polinomiais discretos com uma incerteza aditiva limitada em norma. A condição é formulada em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) (Boyd et al., 1994) com um parâmetro escalar $\xi \in (-1,1)$, i.e., a condição torna-se uma LMI para valores fixos de ξ . Se verificada, a condição provê um ganho robusto e uma matriz de Lyapunov com dependência polinomial de grau arbitrário nos parâmetros incertos que certifica a estabilidade em malha fechada dos sistemas contínuos e discretos. Um exemplo numérico ilustra as vantagens da técnica de discretização proposta e mostra que resultados menos conservadores para a síntese de controladores podem ser obtidos pela condição LMI apresentada aplicando um procedimento de busca no parâmetro escalar $\xi \in (-1,1)$ e com o aumento do grau da função de Lyapunov utilizada.

2 Preliminares

Considere o sistema linear incerto contínuo no tempo

$$\dot{x}(t) = E(\alpha)x(t) + F(\alpha)u(t) \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ os estados do sistema e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o sinal de controle. Deste modo, $E(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ são as matrizes incertas do sistema e pertencem a um domínio politópico, ou seja, podem ser escritas como a combinação convexa de N vértices conhecidos

$$(E, F)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (E_i, F_i) \quad (2)$$

e α é um parâmetro invariante no tempo pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

O objetivo deste artigo é obter um modelo discreto equivalente ao sistema (1), tão preciso quanto possível, para o projeto de controladores digitais que acessem o estado $x(t)$ nos instantes de amostragem kT ,

$k = 1, 2, \dots$, sendo T um período de amostragem constante, e que produzam um sinal de controle $u(t)$. O procedimento de discretização proposto provê o seguinte modelo discreto incerto

$$x((k+1)T) = A(\alpha)x(kT) + B(\alpha)u(kT) \quad (3)$$

em que $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ são as matrizes incertas do sistema discretizado e $\alpha \in \Lambda_N$.

Para o desenvolvimento da condição LMI de estabilizabilidade apresentada neste trabalho é utilizado o seguinte lema.

Lema 1 *Dados um escalar $\lambda > 0$ e matrizes M e N de dimensões compatíveis, então*

$$MN + N'M' \leq \lambda MM' + \lambda^{-1}N'N.$$

3 Discretização de sistemas incertos

Por meio da expansão em série de Taylor, propõe-se um novo procedimento de discretização para o sistema (1) utilizando um tempo de amostragem constante. O sistema discreto resultante possui matrizes no espaço de estados que são polinômios homogêneos de grau ℓ e um termo limitado em norma que representa o erro proveniente do procedimento de discretização e depende do grau ℓ da expansão da série, do tempo de amostragem e dos valores do parâmetro incerto. Portanto, as matrizes do sistema (3) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha) \\ B(\alpha) &= B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

com

$$A_\ell(\alpha) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{E(\alpha)^j}{j!} T^j \quad (5)$$

$$B_\ell(\alpha) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{E(\alpha)^{j-1}}{j!} T^j F(\alpha) \quad (6)$$

e

$$\Delta A_\ell(\alpha) = e^{E(\alpha)T} - A_\ell(\alpha) \quad (7)$$

$$\Delta B_\ell(\alpha) = \left(\int_0^T e^{E(\alpha)s} ds \right) F(\alpha) - B_\ell(\alpha) \quad (8)$$

em que $\Delta A_\ell(\alpha)$ e $\Delta B_\ell(\alpha)$ são os resíduos da expansão em série de Taylor de ordem ℓ e T é o período de amostragem. Como, no caso matricial, os produtos em séries multinomiais são não comutativos, tem-se

$$\begin{aligned} E(\alpha)^q &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i E_i \right)^q = \sum_{p \in \mathcal{P}(q)} \prod_{i=1}^q \alpha_{p_i} E_{p_i} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}(q)} \alpha_{p_1} E_{p_1} \cdots \alpha_{p_q} E_{p_q} \\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}(q)} \alpha_p E_p, \quad E_p = E_{p_1} \cdots E_{p_q} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}(q)} \alpha^k \sum_{p \in \mathcal{P}(k)} E_p \end{aligned} \quad (9)$$

em que, $\alpha^k = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_N^{k_N}$, $k = (k_1 k_2 \dots k_N)$, $\alpha_p = (\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \dots, \alpha_{p_q})$, $p = (p_1 p_2 \dots p_q)$,

$$\mathcal{K}(q) \triangleq \left\{ k = (k_1 \dots k_N) \in \mathbb{N}^N : \sum_{j=1}^N k_j = q, k_j \geq 0 \right\},$$

$\mathcal{P}(q)$ é o conjunto de q -uplas obtidas como todas as possíveis combinações de inteiros não negativos p_i , $i = 1, \dots, q$, tais que $p_i \in \{1, \dots, N\}$, isto é,

$$\mathcal{P}(q) \triangleq \left\{ p \in \mathbb{N}^q : p_i \in \{1, \dots, N\}, i = 1, \dots, q \right\}$$

e $\mathcal{R}(k)$, $k \in \mathcal{K}(q)$, é o subconjunto de todas as q -uplas $p \in \mathcal{P}(q)$ tal que o elemento j de p tem multiplicidade k_j , para $j = 1, \dots, N$, i.e.,

$$\mathcal{R}(k) \triangleq \left\{ p \in \mathbb{N}^q : m_p(j) = k_j, j = 1, \dots, N \right\}$$

sendo que $m_p(j)$ denota a multiplicidade do elemento j em p .

Por definição, para N -uplas k, k' tem-se $k \geq k'$ se $k_i \geq k'_i$, $i = 1, \dots, N$. Operações de soma $k + k'$ e subtração $k - k'$ (quando $k' \leq k$) são definidas componente a componente. Considere ainda a N -upla e_i definida como um vetor nulo de N elementos com a i -ésima componente igual a 1.

Usando as definições previamente apresentadas, (5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} A_\ell(\alpha) &= I + TE(\alpha) + \frac{T^2}{2} E(\alpha)^2 + \dots + \frac{T^\ell}{\ell!} E(\alpha)^\ell \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^\ell I + T \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{\ell-1} E(\alpha) \\ &\quad + \frac{T^2}{2} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{\ell-2} E(\alpha)^2 + \dots + \frac{T^\ell}{\ell!} E(\alpha)^\ell \\ &= \sum_{k \in \mathcal{K}(\ell)} \alpha^k \left(\frac{\ell!}{k!} I + T \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-1) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i - \hat{k}_i > 0}} \frac{(\ell-1)!}{\hat{k}!} E_i \right. \\ &\quad + \frac{T^2}{2!} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-2) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{p \in \mathcal{R}(k-\hat{k})} \frac{(\ell-2)!}{\hat{k}!} E_p + \dots \\ &\quad + \frac{T^j}{j!} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-j) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{p \in \mathcal{R}(k-\hat{k})} \frac{(\ell-j)!}{\hat{k}!} E_p + \dots \\ &\quad \left. + \frac{T^\ell}{\ell!} \sum_{p \in \mathcal{R}(k)} E_p \right) \\ &\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}(\ell)} \alpha^k A_k \end{aligned} \quad (10)$$

e a matriz (6) como

$$\begin{aligned} B_\ell(\alpha) &= TF(\alpha) + \frac{T^2}{2} E(\alpha)F(\alpha) + \dots + \frac{T^\ell}{\ell!} E(\alpha)^{\ell-1} F(\alpha) \\ &= T \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{\ell-1} F(\alpha) + \frac{T^2}{2} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{\ell-2} E(\alpha)F(\alpha) \\ &\quad + \dots + \frac{T^\ell}{\ell!} E(\alpha)^{\ell-1} F(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathcal{K}(\ell)} \alpha^k \left(T \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-1) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ k_i - \hat{k}_i > 0}} \frac{(\ell-1)!}{\hat{k}!} F_i \right. \\ &\quad + \frac{T^2}{2} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-2) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N\} \\ k - \hat{k} - e_i - e_j \geq 0}} \frac{(\ell-2)!}{\hat{k}!} E_i F_j + \dots \\ &\quad + \frac{T^j}{j!} \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(\ell-j) \\ k \geq \hat{k}}} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ p \in \mathcal{R}(k-\hat{k}-e_i)}} \sum_{k_i - \hat{k}_i > 0} \frac{(\ell-j)!}{\hat{k}!} E_p F_i \\ &\quad \left. + \dots + \frac{T^\ell}{\ell!} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ p \in \mathcal{R}(k-e_i)}} E_p F_i \right) \\ &\triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}(\ell)} \alpha^k B_k \end{aligned} \quad (11)$$

em que $k! = k_1! k_2! \dots k_N!$, A_k e B_k são os coeficientes matriciais do sistema polinomial discretizado $A_\ell(\alpha)$ e $B_\ell(\alpha)$.

Este método é uma aproximação de grau ℓ da discretização exata do sistema contínuo incerto. Assim é necessário definir limitantes superiores δ_A e δ_B para a norma dos termos incertos dados em (7) e (8). Neste caso, pode-se definir

$$\delta_A = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta A_\ell(\alpha)\|, \quad (12)$$

$$\delta_B = \sup_{\alpha \in \Lambda_N} \|\Delta B_\ell(\alpha)\|. \quad (13)$$

Estimativas para os limitantes δ_A e δ_B podem ser calculadas por (12) e (13), respectivamente, realizando uma busca em uma malha fina de valores de $\alpha \in \Lambda_N$.

4 Estabilização

Nesta seção, propõe-se uma nova condição LMI de síntese de controladores para sistemas discretos dependentes dos parâmetros de forma polinomial com uma incerteza aditiva limitada em norma, seguindo as mesmas linhas de Hetel et al. (2008).

Considere o seguinte sistema discretizado

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= (A_\ell(\alpha) + \Delta A_\ell(\alpha))x(kT) \\ &\quad + (B_\ell(\alpha) + \Delta B_\ell(\alpha))u(kT) \end{aligned} \quad (14)$$

Definindo a lei de controle

$$u(t) = u(kT) = Kx(kT), \quad t \in [kT, (k+1)T] \quad (15)$$

pode-se enunciar o seguinte teorema para a estabilização do sistema (14) e, consequentemente, para (3).

Teorema 1 *Se existir um grau $g \in \mathbb{N}$, matrizes $W_k \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $k \in \mathcal{K}(g)$, $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, um grau de relaxação de Pólya $d \in \mathbb{N}$, escalares positivos λ_A e λ_B e um dado parâmetro escalar $\xi \in (-1, 1)$, tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$S_k = \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}(d) \\ k \geq \bar{k}}} \frac{d!}{\bar{k}!} W_{k-\bar{k}} > 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(g+d) \quad (16)$$

$$M_k + \sum_{\substack{\hat{k} \in \mathcal{K}(w-\ell) \\ k \geq \hat{k}}} M_{k\hat{k}} + \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}(w-g) \\ k \geq \bar{k}}} M_{k\bar{k}} < 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}(w) \quad (17)$$

em que

$$M_k = \frac{w!}{k!} \begin{bmatrix} \Theta & * & * & * \\ -\xi G & -G - G' & * & * \\ \xi Z & Z & -\lambda_B I & * \\ \xi G & G & 0 & -\lambda_A I \end{bmatrix},$$

$$M_{k\hat{k}} = \frac{(w-\ell)!}{\hat{k}!} \begin{bmatrix} \xi (\bar{A}_{k-\hat{k}} G + G' \bar{A}'_{k-\hat{k}}) & * & * & * \\ G' \bar{A}'_{k-\hat{k}} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{k\bar{k}} = \frac{(w-g)!}{\bar{k}!} \begin{bmatrix} -W_{k-\bar{k}} & * & * & * \\ 0 & W_{k-\bar{k}} & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $\Theta = (\lambda_A \delta_A^2 + \lambda_B \delta_B^2) I$, $\bar{A}_k = A_k + B_k ZG^{-1}$ e A_k e B_k os coeficientes das matrizes $A_\ell(\alpha)$ e $B_\ell(\alpha)$ com grau de aproximação $\ell \in \mathbb{N}$, $w = \max\{g+d, \ell+d\}$, e δ_A e δ_B dados, respectivamente, por (12) e (13), então $K = ZG^{-1}$ é um ganho robusto por realimentação de estados que estabiliza o sistema (14), e consequentemente, (3).

Prova: Primeiro, note que $(\alpha_1 + \dots + \alpha_N)^d = 1$ para qualquer $d \in \mathbb{N}$, assim a matriz $W(\alpha)$ pode ser reescrita como

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^d W(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}(g+d)} \alpha^k S_k. \quad (18)$$

Portanto, se $S_k > 0$, $k \in \mathcal{K}(g+d)$, então, $W(\alpha) > 0$ verifica-se $\forall \alpha \in \Lambda_N$. Agora, definindo $A_{mf}(\alpha) = A_\ell(\alpha) + B_\ell(\alpha) ZG^{-1}$ e escolhendo

$$Q = \text{diag}(-W(\alpha) + \Theta, W(\alpha), -\lambda_B I, -\lambda_A I),$$

$$U = \begin{bmatrix} A_{mf}(\alpha)' \\ -I \\ K \\ I \end{bmatrix}, \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A'_{mf}(\alpha) & K' & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \xi I \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \xi I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

em que N_U e N_V denotam bases arbitrárias do espaço nulo de U e V respectivamente, tem-se que

$$Q + U' G' V + V' G U < 0 \quad (19)$$

que é (17) multiplicada por α^k , somada para todo $k \in \mathcal{K}(w)$. Essas condições são equivalentes, pelo Lema da Projeção (Boyd et al., 1994; Gahinet e Apkarian, 1994), a

$$N'_V Q N_V = \text{diag}\left((\xi^2 - 1) W(\alpha) + \Theta, -\lambda_B I, -\lambda_A I\right) < 0 \quad (20)$$

que permite inferir os limitantes para o parâmetro escalar ξ , pois do termo (1,1) de (20) tem-se que $(\xi^2 - 1) W(\alpha) > (\lambda_A \delta_A^2 + \lambda_B \delta_B^2) I$ e como $W(\alpha) > 0$, então $\xi \in (-1, 1)$.

Utilizando a segunda condição do Lema da Projeção, tem-se

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha) + \Theta & * & * & * \\ W(\alpha) A_{mf}(\alpha)' & -W(\alpha) & * & * \\ 0 & KW(\alpha) & -\lambda_B I & * \\ 0 & W(\alpha) & 0 & -\lambda_A I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

que foi obtida de $N'_U Q N_U$ e a utilização do complemento de Schur no elemento (2,2). Se (21) for verificada, então a seguinte condição também o é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} W(\alpha) - \lambda_A \delta_A^2 I & * & * \\ W(\alpha) A_{mf}(\alpha)' & W(\alpha) & * \\ 0 & W(\alpha) & \lambda_A I \end{bmatrix}}_R - \lambda_B \begin{bmatrix} \delta_B I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_B I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}'$$

$$- \lambda_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -W(\alpha) K' \\ 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -W(\alpha) K' \\ 0 \end{bmatrix}'}_N > 0. \quad (22)$$

Note que (22) foi obtida de (21) com o emprego do complemento de Schur. Em seguida, utilizando o Lema 1 e sabendo que $\Delta B_\ell(\alpha) \Delta B'_\ell(\alpha) < \delta_B^2 I$, tem-se

$$R - \begin{bmatrix} \Delta B_\ell(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N - N' \begin{bmatrix} \Delta B_\ell(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' > 0 \quad (23)$$

que é idêntica a

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) - \lambda_A \delta_A^2 I & * & * \\ W(\alpha) (A_\ell(\alpha) + B(\alpha) K)' & W(\alpha) & * \\ 0 & W(\alpha) & \lambda_A I \end{bmatrix} > 0. \quad (24)$$

Repetindo o mesmo procedimento (primeiro aplicando o complemento de Schur e após o Lema 1), finalmente obtém-se

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & * \\ W(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha) K)' & W(\alpha) \end{bmatrix} > 0. \quad (25)$$

com $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$, dadas em (4), certificando a estabilidade do sistema (14) em malha fechada. \square

Note que $\xi \in (-1, 1)$ representa um grau de liberdade a ser explorado na busca de uma solução factível. Neste caso, pode-se realizar uma busca linear em ξ , ou simplesmente, testar um conjunto de valores.

Observação 1 Embora a estabilizabilidade de um sistema discretizado incerto, não implique, no caso geral, na estabilizabilidade do sistema contínuo incerto original, na abordagem proposta a lei de controle de realimentação de estados (15) garante a estabilidade do sistema contínuo incerto (1) em malha fechada, se o erro de aproximação do procedimento de discretização for levado em consideração. Seguindo a mesma linha usada em Hetel et al. (2007), para qualquer $\alpha \in \Lambda_N$ e

um dado período de amostragem T , a solução do sistema linear (1) no intervalo $t \in [kT, (k+1)T]$ é dada por

$$x(t) = e^{E(\alpha)(t-kT)}x(kT) + \int_0^{t-kT} e^{E(\alpha)\tau}F(\alpha)u(\tau)d\tau. \quad (26)$$

Tomando o supremo de (26) e usando a desigualdade triangular, tem-se

$$\sup_{t \in [kT, (k+1)T]} \|x(t)\| \leq \sup_{t \in [kT, (k+1)T]} \left\| e^{E(\alpha)(t-kT)} \right\| \|x(kT)\| + \left\| \int_0^{t-kT} e^{E(\alpha)\tau}F(\alpha)u(\tau)d\tau \right\|. \quad (27)$$

Como $u(t) = u(kT)$, para $t \in [kT, (k+1)T]$, $u(\tau)$ pode sair da integral. Fazendo uma mudança de variáveis $q = t - kT$, (27) pode ser reescrita como

$$\sup_{q \in [0, T]} \|x(t)\| \leq \left(\sup_{q \in [0, T]} \|A_{\ell q}(\alpha)\| + \sup_{q \in [0, T]} \|\delta_{A_{\ell q}}\| \right) \|x(kT)\| + \left(\sup_{q \in [0, T]} \|B_{\ell q}(\alpha)\| + \sup_{q \in [0, T]} \|\delta_{B_{\ell q}}\| \right) \|u(kT)\|,$$

na qual os termos $A_{\ell q}(\alpha)$ e $B_{\ell q}(\alpha)$ são somatórios finitos dados em (5) e (6), com período de amostragem igual a q , e $\delta_{A_{\ell q}}$ e $\delta_{B_{\ell q}}$ são sempre limitados, dados em (7) e (8). Além disso, para o sistema em malha fechada, $x(kT)$ e $u(kT) = Kx(kT)$ tendem a zero quando $k \rightarrow \infty$. Então $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema (1) é assintoticamente estável em malha fechada com a lei de controle (15).

5 Experimentos Numéricos

Nesta seção, são apresentadas comparações numéricas entre o método de discretização proposto neste artigo e outros métodos da literatura para realimentação de estados de sistemas incertos, que foram implementados em Matlab, versão 7.10 (R2010a) usando os pacotes Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999).

Considere um sistema contínuo massa-mola dado em Wie e Bernstein (1992)

$$\dot{x}(t) = E(c)x(t) + Fu(t) \quad (28)$$

em que $c \in [3.6, 5.4]$ e

$$E(c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c/2 & c/2 & 0 & 0 \\ c/3 & -c/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ao avaliar a matriz dinâmica $E(c)$ do sistema nos valores extremos do parâmetro incerto c , obtém-se um polítopo de dois vértices. O objetivo neste exemplo é projetar um controlador digital robusto por realimentação de estados que assegure a estabilidade do sistema contínuo incerto. Assim, os ganhos por realimentação de estados são obtidos empregando a condição apresentada em de Oliveira et al. (1999) e o Teorema 1 para modelos discretos obtidos de (10) e (11)

com $\ell = 1, 2, 3$ e $T = 0.5$ s. Note que a condição em de Oliveira et al. (1999) não considera a incerteza aditiva gerada pelo modelo discreto e pode tratar apenas sistemas politópicos, ou seja, apenas o caso $\ell = 1$. Em todos os testes, utilizaram-se matrizes de Lyapunov $W(\alpha)$ com dependência afim ($g = 1$) nos parâmetros incertos.

Realizando uma discretização de primeira ordem de Taylor nos vértices do sistema (28) e aplicando o Teorema 3 de de Oliveira et al. (1999), encontra-se um ganho robusto por realimentação de estados que, embora estabilize o sistema discretizado, não garante a estabilidade do sistema contínuo original, pois não leva em consideração o erro de aproximação. Para ilustrar este caso, considere a simulação temporal realizada em Simulink/Matlab com parâmetros de entrada: $\alpha = [0.3908 \quad 0.6092]$, $x_0 = [1 \quad -2 \quad 3 \quad -1]^T$ e o ganho do controlador obtido com o Teorema 3 em de Oliveira et al. (1999), cujas trajetórias do sistema em malha fechada são apresentadas na Figura 5. Como pode ser observado, o controlador obtido com a condição proposta em de Oliveira et al. (1999) não consegue estabilizar o sistema contínuo incerto, embora estabilize o modelo discretizado com $\ell = 1$.

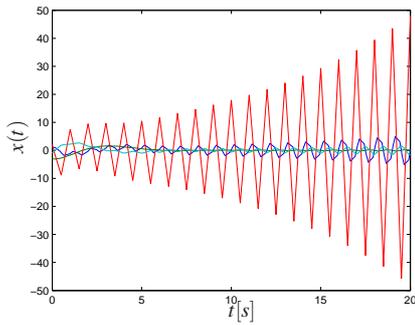
Neste ponto, é preciso enfatizar o papel crucial desempenhado pelos limitantes dos erros de discretização δ_A e δ_B apresentados neste artigo. Para pequenos graus da aproximação de Taylor, os valores de δ_A e δ_B são altos e a condição de síntese de controladores por realimentação de estados (Teorema 1), em geral, não produz um ganho estabilizante. Contudo, com o aumento do grau ℓ da expansão em séries de Taylor, os limitantes do erro são reduzidos como mostrado a seguir:

$$\delta_{A_{\ell=1}} = 0.7361, \quad \delta_{A_{\ell=2}} = 0.4120, \quad \delta_{A_{\ell=3}} = 0.0629, \\ \delta_{B_{\ell=1}} = 0.0672, \quad \delta_{B_{\ell=2}} = 0.0322, \quad \delta_{B_{\ell=3}} = 0.0045.$$

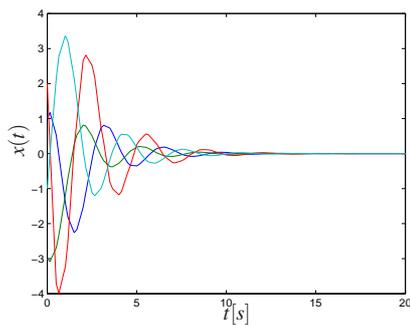
Neste exemplo, apenas para $\ell \geq 3$ os valores de δ_A e δ_B são suficientemente pequenos para permitir que o Teorema 1 encontre soluções factíveis. Na Figura 5, apresenta-se o resultado de uma simulação temporal realizada em Simulink/Matlab para os mesmos valores de α e x_0 da Figura 5 com o controlador produzido pelo Teorema 1 para $\ell = 3$, $g = 1$, $d = 0$, $\xi = 0$, $\delta_A = 0.0629$ e $\delta_B = 0.0045$. Note que, neste caso, o controlador projetado estabiliza o sistema contínuo (28).

É importante destacar que, com o aumento do grau de discretização ℓ e a busca no parâmetro escalar ξ o conservadorismo dos resultados pode ser reduzido. Para ilustrar esse fato, considere que o parâmetro incerto do modelo c pertence ao intervalo $[3.6, a]$, e que o objetivo é avaliar o maior valor de a para o qual o sistema continua estabilizável. Por exemplo, para $\ell = 4$ e $\xi = 0$, a pode variar até 9.8, contudo se ℓ for escolhido igual a 5 e $\xi = 0$, este valor sobe para 16.6. Além disso, se for realizada uma busca no parâmetro escalar para este último grau, pode-se chegar a um valor de a igual a 16.7.

Referências



(a)



(b)

Figura 1: Trajetórias dos estados do sistema (28) usando $\alpha = [0.3908 \ 0.6092]$, $x_0 = [1 \ -3 \ 2 \ -1]'$: (a) com o controlador obtido pelo Teorema 3 em de Oliveira et al. (1999) e uma aproximação de primeira ordem ($\ell = 1$) de Taylor; (b) com ganho de realimentação fornecido pelo Teorema 1 com $g = 1$, $d = 0$, $\ell = 3$, $\xi = 0$, $\delta_A = 0.0629$ e $\delta_B = 0.0045$.

6 Conclusão

Neste artigo foi proposto um novo procedimento de discretização para sistemas politópicos lineares invariantes no tempo baseado em expansão de séries de Taylor. Usando um grau de aproximação adequado, o sistema discreto resultante reproduz apropriadamente o comportamento dinâmico do sistema contínuo. Adicionalmente, novas condições para a síntese de controladores robustos por realimentação de estados para sistemas discretos incertos com dependência polinomial nos parâmetros e com uma incerteza aditiva limitada em norma foram propostas em termos de LMIs. Experimentos numéricos mostram que, diferentemente das técnicas usuais baseadas em aproximações de primeira ordem da série de Taylor, o método proposto pode prover controladores que estabilizam o sistema contínuo original.

Agradecimentos

Às agências FAPESP (Proc. 2011/08312-6), CAPES e CNPq.

- Ackermann, J. (1993). *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*, Springer Verlag, London, UK.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Syst. Control Letts.* **37**(4): 261–265.
- Gahinet, P. e Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **4**(4): 421–448.
- Hara, S., Yamamoto, Y. e Fujioka, H. (1996). Modern and classical analysis/synthesis methods in sampled-data control — A brief overview with numerical examples, *Proc. 35th IEEE Conf. Decision Control*, Kobe, Japan, pp. 1251–1256.
- Hetel, L., Daafouz, J. e Iung, C. (2007). LMI control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems, *Proc. 2007 Amer. Control Conf.*, New York, NY, USA, pp. 1401–1406.
- Hetel, L., Daafouz, J. e Iung, C. (2008). Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modelling, *Int. J. Control* **81**(7): 1125–1138.
- Kothare, M. V., Balakrishnan, V. e Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica* **32**(10): 1361–1379.
- Lee, S. e Won, S. (2006). Model Predictive Control for linear parameter varying systems using a new parameter dependent terminal weighting matrix, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* **E89-A**(8): 2166–2172.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289.
- Ogata, K. (1995). *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall International, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
- Shieh, L. S., Wang, W. e Chen, G. (1998). Discretization of cascaded continuous-time controllers and uncertain systems, *Circ. Syst. Signal Process.* **17**(5): 591–611.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optim. Method Softw.* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Wie, B. e Bernstein, D. S. (1992). Benchmark problems for robust control design, *J. Guidance, Control, Dyna.* **15**(5): 1057–1059.