

CONTROLE PREDITIVO EXPLÍCITO APLICADO A UM HELICÓPTERO DE LABORATÓRIO

DEIVISON DE SOUZA LIMA*, TAKASHI YONEYAMA*, ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO*

*Praça Mal. Eduardo Gomes, 50
Centro Tecnológico de Aeronáutica
São José dos Campos, São Paulo, Brasil

Emails: deivison@ita.br, takashi@ita.br, kawakami@ita.br

Abstract— The strategy known as Predictive Control became a widespread option for applications in complex multivariable systems containing restriction. In this strategy, at each sampling time, an optimization problem must be solved in order to obtain the optimal value of control to be applied in the plant. Depending on the complexity of the system being controlled, dynamics of the plant or the sampling time adopted, this optimization problem may require high computational effort which may be prohibitive for real-time implementation. This work aims to study and implement the MPC strategy using multiparametric programming, by recasting of the control problem that allows to obtain the solution of the control problem off-line. At the end, the proposal is illustrated through real time implementation in a laboratory 3DOF helicopter.

Keywords— Predictive Control, Multiparametric Programming, Multiparametric Toolbox.

Resumo— A estratégia conhecida como Controle Preditivo (MPC) se tornou uma opção bem disseminada em aplicações para sistemas multivariáveis complexos que contêm restrições. Nessa estratégia, a cada instante de amostragem, um problema de otimização deve ser solucionado no intuito de se obter o valor ótimo de controle a ser aplicado na planta. Dependendo da complexidade do sistema a ser controlado, da dinâmica da planta e do tempo de amostragem escolhido, esse problema de otimização pode demandar elevado esforço computacional, que pode ser proibitivo para implementação em tempo real. Este trabalho tem como objetivo implementar a estratégia MPC utilizando programação multiparamétrica, mediante a reformulação do problema de controle de forma que a solução do problema de controle seja obtida *a priori*. Ao final, a proposta é ilustrada por meio de ensaio em tempo real em um helicóptero 3DOF de laboratório.

Palavras-chave— Controle Preditivo, Otimização Multiparamétrica, Toolbox de Otimização Multiparamétrica.

1 Introdução

A estratégia de controle preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Control*) permite a inclusão de restrições físicas e operacionais na formulação do problema de controle. Por este motivo, esta estratégia tem sido largamente utilizada em variados setores industriais. O primeiro algoritmo de controle surgiu na década de 80 (Richalet et al., 1978), atendendo necessidades da indústria de petróleo (Goodwin et al., 2012). Atualmente, MPC's podem ser encontrados nas mais diversas aplicações, como por exemplo, aplicações aeronáuticas (Chao et al., 2011), automotivas (Del Re et al., 2010), sistemas biomédicos (Li e Haddad, 2012), entre outras.

Nesta estratégia as ações de controle são escolhidas em tempo real de forma a otimizar um determinado índice de desempenho que inclui o comportamento futuro da planta, obtido por meio de um modelo de predição. A cada instante de amostragem, a determinação da sequência de controle é realizada, medições e predições são atualizadas e o primeiro valor da sequência de controle ótimo é aplicado ao sistema que está sendo controlado. Na solução do problema de otimização diversos métodos podem ser empregados.

Entretanto, as limitações principais da estratégia MPC são o esforço computacional devido a repetitiva solução do problema de otimização e a natureza implícita de malha fechada (Kouramas et al., 2011). Com o objetivo de reduzir o es-

forço computacional e proporcionar uma análise das ações ótimas adotadas pelo controlador preditivo, o problema de otimização pode ser reformulado utilizando programação multiparamétrica. Tal procedimento reduz a tarefa de otimização realizada a cada instante de amostragem a um processo simples de avaliação de funções com o objetivo de identificar quais ações de controle devem ser adotadas (Dua et al., 2007).

Neste trabalho deseja-se empregar a estratégia MPC com o emprego da técnica de programação multiparamétrica para o controle de um sistema de dinâmica rápida. O sistema de controle deve ser formulado de forma a introduzir ação integral na malha de controle. O estudo de caso adotado será um helicóptero 3DOF de laboratório.

Este artigo está assim dividido: a seção 2 apresenta a formulação básica da estratégia MPC e o problema de otimização quadrático associado; a reformulação do problema e a solução via programação multiparamétrica corresponde aos tópicos abordados na seção 3; o helicóptero 3DOF adotado como estudo de caso é apresentado na seção 4; será avaliada a possibilidade de se empregar a formulação MPC empregando programação multiparamétrica a um sistema de dinâmica rápida; a seção 5 contém os resultados de implementação da estratégia e discussões sobre os mesmos; finalmente, apresentam-se conclusões e propostas de trabalhos futuros na seção 6.

1.1 Notação

- $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$: estado da planta;
- H : matriz dinâmica;
- f_x : resposta livre do sistema;
- k : instante atual;
- $N \in \mathbb{N}$: horizonte de predição;
- $M \in \mathbb{N}$: horizonte de controle;
- \mathbf{Q} e \mathbf{R} : matrizes de penalização do estado e do controle - caso univariável;
- \mathbf{Q} e \mathbf{R} : Matrizes bloco diagonal - caso multi-variável;
- $(\cdot)^*$: valor ótimo da variável (\cdot) ;
- $(\hat{\cdot})(k+i|k)$: valor predito da variável (\cdot) no instante $k+i$ com base nas informações disponíveis até o instante k ;
- λ : multiplicadores de Lagrange;
- \star : todas as restrições estão inativas;
- \diamond : nem todas as restrições estão inativas;

2 Formulação de controle preditivo adotada

Neste trabalho, o modelo de predição da planta utiliza uma representação em espaço de estados a tempo discreto da forma:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Supõe-se que o estado x seja medido diretamente e que o par (A, B) seja controlável. A equação de predição para um horizonte de N passos é dada por:

$$\hat{x} = H\hat{u} + f_x \quad (2)$$

sendo os vetores

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{x}(k+2|k) \\ \hat{x}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}(k|k) \\ \hat{u}(k+1|k) \\ \hat{u}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix}$$

e as matrizes,

$$H = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & 0 & \dots & 0 \\ A^2B & AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & A^{N-3}B & \dots & B \end{bmatrix},$$

$$f_x = \Phi_x \cdot x(k), \quad \Phi_x = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}$$

Caso $M < N$, a matriz H resultante terá dimensão $n \cdot N \times p \cdot M$. Neste caso, após M passos impõe-se o último valor de controle. O controlador preditivo é implementado na forma de regulador, sendo que o problema de otimização com restrições a ser solucionado no instante k consiste na minimização de uma função de custo da forma

$$\begin{aligned} \min_{\hat{u} \in \mathbb{R}^{p \cdot M}} J(\hat{x}, \hat{u}) &= \hat{x}^T \mathbf{Q} \hat{x} + \hat{u}^T \mathbf{R} \hat{u} \\ \text{s.a.} \quad \hat{x} &= H\hat{u} + f_x \\ S\hat{u} &\leq b \end{aligned} \quad (3)$$

sendo \mathbf{Q} e \mathbf{R} matrizes de penalização dos estados e do controle respectivamente. \mathbf{Q} é uma matriz bloco diagonal de dimensão $n \cdot N \times n \cdot N$ e \mathbf{R} uma matriz de dimensão $p \cdot M \times p \cdot M$ da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}[Q, Q, \dots, Q], \quad \mathbf{R} = \text{diag}[R, R, \dots, R]$$

sendo $Q \geq 0$ e $R > 0$.

As restrições de desigualdade são obtidas conforme (Maciejowski, 2002) e são impostas sobre o controle e sobre o estado. S corresponde a uma matriz de dimensão $(2 \cdot p \cdot M + 2 \cdot n \cdot M) \times p \cdot M$ e b corresponde a um vetor coluna de dimensão $(2 \cdot p \cdot M + 2 \cdot n \cdot N) \times 1$.

Dependendo do número de variáveis do problema, das restrições impostas ou do instante de amostragem adotado no projeto, a solução do problema de otimização (3) pode exigir elevado esforço computacional e com isso, hardware com custo associado mais elevado para implementação da estratégia. Por esse fato, técnicas de otimização para a solução de problemas de otimização com restrições ou reformulações do problema que reduzam o esforço computacional associado são relevantes para a implementação da estratégia MPC.

3 Reformulação do problema de Controle

O problema de otimização (3) pode ser reformulado adotando os seguintes procedimentos. Inicialmente, a restrição de igualdade, descrita pelo modelo de predição $\hat{x} = H\hat{u} + f_x$ pode ser substituída na função de custo:

$$\begin{aligned} J(\hat{x}, \hat{u}) &= (H\hat{u} + f_x)^T \mathbf{Q} (H\hat{u} + f_x) + \hat{u}^T \mathbf{R} \hat{u} \\ J(\hat{u}) &= \hat{u}^T (H^T \mathbf{Q} H + \mathbf{R}) \hat{u} + 2(f_x)^T \mathbf{Q} H \hat{u} + (f_x)^T \mathbf{Q} (f_x) \end{aligned}$$

Completam-se os quadrados de forma conveniente para obtenção da seguinte equação de custo:

$$\begin{aligned} J(\hat{u}) &= \frac{1}{2} (\hat{u} + \Gamma)^T \Lambda (\hat{u} + \Gamma) + \Psi \\ &= \frac{1}{2} \hat{u}^T \Lambda \hat{u} + \Gamma^T \Lambda \hat{u} + \frac{1}{2} \Gamma^T \Lambda \Gamma + \Psi \end{aligned} \quad (4)$$

sendo evidente que:

$$\begin{cases} \Lambda = 2(H^T \mathbf{Q}H + \mathbf{R}) \\ \Gamma = (H^T \mathbf{Q}H + \mathbf{R})^{-1} H^T \mathbf{Q}(f_x) \end{cases}$$

Ψ , que é um termo independente, não afeta o valor do custo mínimo durante o procedimento de otimização, por isso este termo pode ser eliminado da equação de custo. Dessa forma, para $M < N$, Λ será uma matriz $p \cdot M \times p \cdot M$ e Γ será um vetor $p \cdot M \times 1$. Define-se uma variável auxiliar z dada por:

$$z = \hat{u} + \Gamma \quad (5)$$

Logo, o problema de otimização (3) pode ser escrito de forma mais simples em função da nova variável z :

$$\begin{aligned} z = \min_z \left\{ \frac{1}{2} z^T \Lambda z \right\} \\ \text{s.a. } Sz \leq b + S\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

Observando o problema de otimização reformulado para a variável z e sob a hipótese de factibilidade, nota-se as seguintes propriedades:

1. É convexo, tendo em vista que a função objetivo é convexa pois Λ é uma matriz positivo definida ;
2. O conjunto definido por $Sz \leq b + S\Gamma$ é convexo, pois as restrições são lineares;
3. O custo é quadrático e as restrições são lineares, sendo portanto funções diferenciáveis;
4. Vale a condição de Slater pois todas as restrições são lineares (Borelli et al., 2010);

Com essas propriedades, as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas para z^* bem como para o problema dual (λ^*, μ^*) . Reescrevendo as condições para as variáveis definidas para o problema de otimização reformulado, tem-se:

$$\Lambda z^* + S^T \lambda^* = 0 \quad (7a)$$

$$\lambda_i^* (S_i z^* - b_i - S_i \Gamma) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (7b)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (7c)$$

$$S z^* \leq b + S\Gamma \quad (7d)$$

onde o subscripto i indica a i -ésima linha para matrizes ou o i -ésimo elemento para vetores e $m = 2 \cdot (p \cdot M + n \cdot N)$. Resolvendo a equação (7a), tem-se:

$$z^* = -\Lambda^{-1} S^T \lambda^* \quad (8)$$

Para as matrizes que definem o problema de otimização reformulado, adota-se a notação $\check{\lambda}$, \check{S} e \check{b} para as linhas da matriz que definem as restrições que são ativadas no processo de otimização e a notação $\check{\lambda}$, \check{S} e \check{b} para as linhas da matriz que não são ativadas durante a otimização. Caso nenhuma das restrições ao longo do horizonte de predição N seja ativada, então define-se $\check{\lambda} = 0$.

Pelas equações (7b), conclui-se que os multiplicadores de Lagrange das restrições inativas são iguais a zero. Logo:

$$\check{\lambda} = 0 \quad (9)$$

Portanto, pode-se reescrever a equação (8) como:

$$z^* = -\Lambda^{-1} \check{S}^T \check{\lambda} \quad (10)$$

Escrevendo as equações de folga complementar (7b) para o conjunto de restrições ativas:

$$\check{S} z^* - \check{b} - \check{S}\Gamma = 0 \quad (11)$$

Substituindo z^* (equação (10)) na equação (11) e resolvendo para $\check{\lambda}$, tem-se:

$$\check{\lambda} = -(\check{S}\Lambda^{-1}\check{S}^T)^{-1}(\check{b} + \check{S}\Gamma) \quad (12)$$

Substituindo este resultado em (10) resulta em:

$$z^* = \begin{cases} 0, & \star \\ \Lambda^{-1} \check{S}^T (\check{S}\Lambda^{-1}\check{S}^T)^{-1} (\check{b} + \check{S}\Gamma), & \diamond \end{cases} \quad (13)$$

Como existe uma relação entre z e \hat{u} (equação (5)), a solução do problema para a variável original \hat{u} pode ser expressa como:

$$\hat{u}^* = \begin{cases} -\Gamma, & \star \\ -\Gamma + \Lambda^{-1} \check{S}^T (\check{S}\Lambda^{-1}\check{S}^T)^{-1} (\check{b} + \check{S}\Gamma), & \diamond \end{cases} \quad (14)$$

Por inspeção da solução do problema apresentada na equação (14), percebe-se que \hat{u} corresponde a uma função afim por partes do vetor de estados $x(k)$. Conclui-se então que para um dado conjunto de restrições ativas:

1. G , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \check{S} e por consequência Λ são constantes, ou sejam, eles não dependem de nenhuma variável pertencente ao vetor de estados $x(k)$;
2. f_x é função afim do vetor de estados $x(k)$, o que implica que Γ é função afim de $x(k)$;
3. \check{b} também é função do vetor de estados $x(k)$, já que \check{b} é função de f_x . Assim, \check{b} é função afim de $x(k)$.

A função afim ativa num determinado instante k é determinada a partir de (14) de acordo com o conjunto de restrições ativas no problema de otimização do referido instante. Dessa forma, o conjunto de restrições define uma região no espaço de estados \mathbb{R}^n para a qual um determinado conjunto de restrições é ativa. Essa região pode ser determinada a partir das equações (7c) e (7d):

$$\check{\lambda} \stackrel{12}{=} -(\check{S}\Lambda^{-1}\check{S}^T)^{-1}(\check{b} + \check{S}\Gamma) \stackrel{7c}{\leq} 0 \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} S z^* - b - S\Gamma \stackrel{13}{=} S \Lambda^{-1} \check{S}^T (\check{S}\Lambda^{-1}\check{S}^T)^{-1} (\check{b} + \check{S}\Gamma) - \\ b - S\Gamma \stackrel{7d}{\leq} 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

Percebe-se assim que a reformulação do problema original (3) utilizando programação multiparamétrica sistematicamente divide o espaço de estados em regiões características delimitadas por restrições ativas do problema de otimização, que descrevem a factibilidade e características de performance do problema de otimização em função de incertezas nos parâmetros do problema de otimização (Borelli et al., 2010). Tal particionamento é obtido a priori e assim, como citado anteriormente, em tempo real a tarefa de otimização se reduz a simples avaliação de funções.

(Spjotvold, 2008; Tondel, 2003) citam vantagens e desvantagens de formular o problema (3) da forma (6) e solucioná-lo utilizando programação multiparamétrica. Algumas vantagens são:

- A implementação em tempo real não necessita de pacote computacional de otimização;
- A implementação pode ser feita em hardware de baixo custo;
- A exatidão da solução pode ser verificada antes da implementação em tempo real, questão fundamental para aplicações de segurança críticas.

As principais desvantagens estão ligadas ao rápido crescimento do número de regiões envolvidas na lei de controle com o aumento no número de variáveis de estado, o que limita essa formulação a problemas de pequeno porte (Tondel, 2003). Na próxima seção apresenta-se o estudo de caso considerado.

4 Planta Piloto

O estudo de caso aqui apresentado envolve o problema de controle de um helicóptero 3DOF de laboratório. O modelo inicial empregado no projeto foi desenvolvido em (Lopes, 2007) e aprimorado em (Maia, 2008). As variáveis de estado do modelo são os ângulos da arfagem ($P \triangleq x_1$), elevação ($E \triangleq x_3$) e deslocamento ($T \triangleq x_5$) e suas respectivas taxas de variação temporal ($\dot{P} \triangleq x_2$, $\dot{E} \triangleq x_4$ e $\dot{T} \triangleq x_6$), que na prática são estimadas por meio de filtros de primeira ordem. As duas entradas (u_1, u_2) correspondem às tensões aplicadas aos amplificadores de potência dos motores dianteiro e traseiro do equipamento.

Como o interesse é controlar o movimento de deslocamento do helicóptero, o modelo utilizado foi obtido mediante linearização em torno do ponto de equilíbrio como em (Pascoal, 2010) e discretização com período de amostragem $T = 0,04s$ (Maia, 2008). O modelo adotado para o projeto do controlador preditivo corresponde a uma simplificação que despreza a pequena contribuição dos estados x_2, x_3, x_4 e das entradas u_1, u_2 . Como a dinâmica de deslocamento é fortemente influenciada pela dinâmica de arfagem, considera-se o estado x_1 como uma entrada. A simplificação tem o

objetivo de diminuir o número de partições resultantes do problema de otimização multiparamétrica.

Com o objetivo de garantir erro de regime nulo para o movimento de deslocamento, adiciona-se um estado que corresponde ao erro de rastreamento acumulado ($x_7(k)$) (Kale e Chipperfield, 2005). Para isso, são repassados ao controlador MPC o erro e a integral do erro de rastreamento. O modelo adotado no projeto do controlador preditivo em tempo discreto é apresentado na equação (16):

$$\begin{bmatrix} x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_7(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0396 & 0 \\ 0 & 0,9819 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0010 \\ -0,0497 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_1(k) \quad (16)$$

O esquema de controle preditivo proposto é demonstrado por meio de um diagrama de blocos na figura 1:

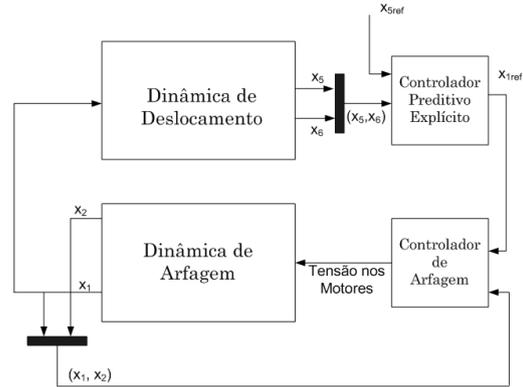


Figura 1: Relação entre a dinâmica de arfagem e a de deslocamento.

O horizonte de controle adotado foi M igual a 8 e o horizonte de predição N igual a 40. As matrizes de penalização da trajetória de estado e do controle Q e R foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad R = 20$$

Adicionalmente, impõe-se que o sinal de referência x_{1ref} (vide figura 1) assuma valores entre $-15^\circ \leq x_{1ref} \leq 15^\circ$. Para obtenção do controlador preditivo explícito foi empregado o *toolbox* MPT (Kvanisca et al., 2004) para *Matlab*®. Nos ensaios experimentais, foi utilizado o *software* *Quarc 2.2* (*Quanser Consulting*) para controle em tempo real.

5 Resultados

Adotando os parâmetros apresentados na seção anterior, o controlador preditivo explícito resultante apresentou 402 regiões.

Os sinais de referência para o movimento do helicóptero são apresentados na figura 2. Deseja-se elevar o helicóptero 20° (em relação ao nível da mesa, o que corresponde a -7° em relação à posição horizontal do helicóptero) e após isso, realizar manobras de 25° de deslocamento para ambos os lados.

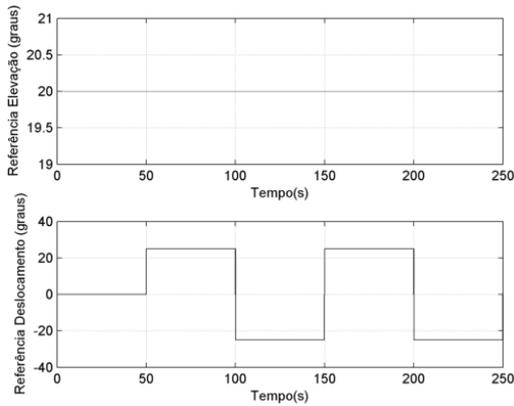


Figura 2: Sinais para regulação da planta e para realização de manobras de 25° de deslocamento.

A figura 3 apresenta o ângulo de deslocamento obtido adotando os parâmetros considerados na seção 4. Percebe-se que o MPC projetado conseguiu conduzir o erro a zero durante o ensaio.

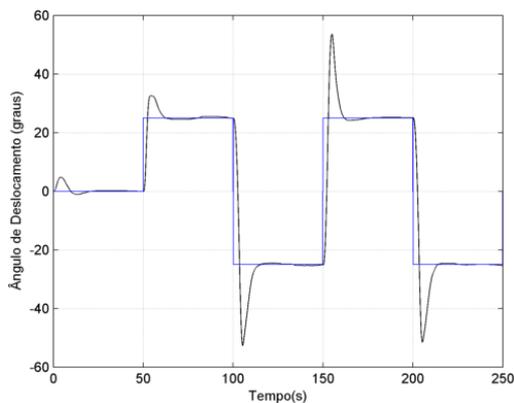


Figura 3: Ângulo de Deslocamento (graus).

O sinal de referência x_{1ref} respeita a restrição imposta de $-15^\circ \leq x_{1ref} \leq 15^\circ$ (figura 4). Percebe-se que o controlador preditivo explícito adota leis de controle diferentes nas manobras realizadas em $t = 100$, $t = 150$ e $t = 200$ segundos do experimento, já que o controlador assume regiões da partição do estado diferentes (figura 5). Isso ocorre porque para um degrau com amplitude igual a 50° o controlador preditivo assume valores próximos à

restrição imposta que é de $\pm 15^\circ$. Nessa condição, o sistema de controle está operando fora da região linear.

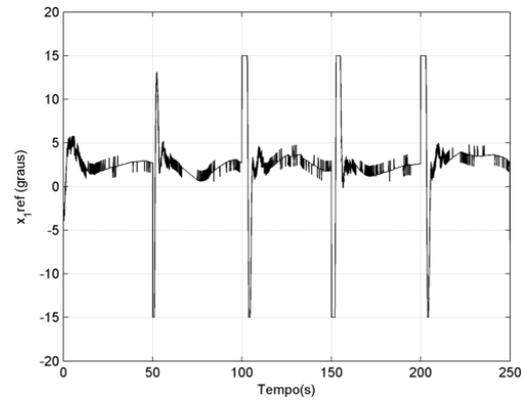


Figura 4: Referência de Arfagem x_{1ref} (graus).

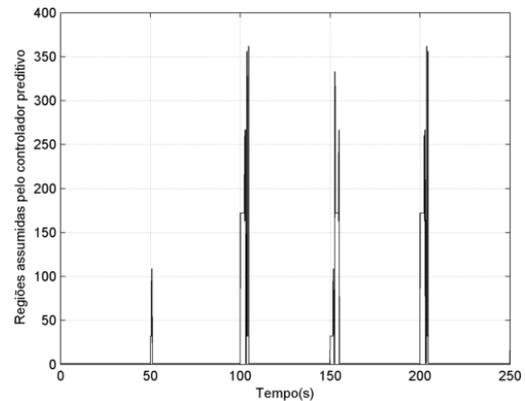


Figura 5: Regiões assumidas pelo controlador preditivo.

Para essa referência de arfagem (figura 4), a resposta da dinâmica de arfagem resultante é apresentada na figura 6. Percebe-se que o movimento é rápido, indicando que o controlador preditivo proposto é agressivo na realização da tarefa de controle.

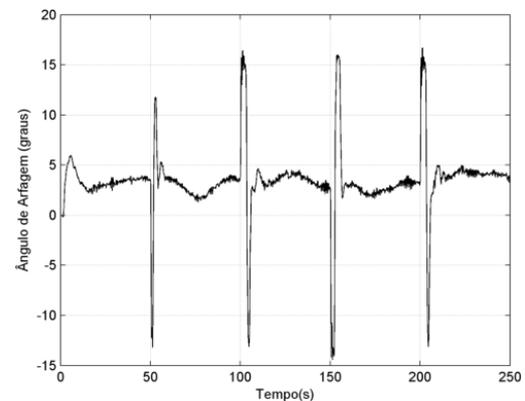


Figura 6: Ângulo de Arfagem (graus).

Com o objetivo de quantificar o esforço com-

putacional associado à formulação empregada, o tempo computacional gasto no ensaio foi obtido e é apresentado na figura 7. Tal resultado indica que o tempo de computação é bem menor do que o período de amostragem adotado no projeto do sistema de controle.

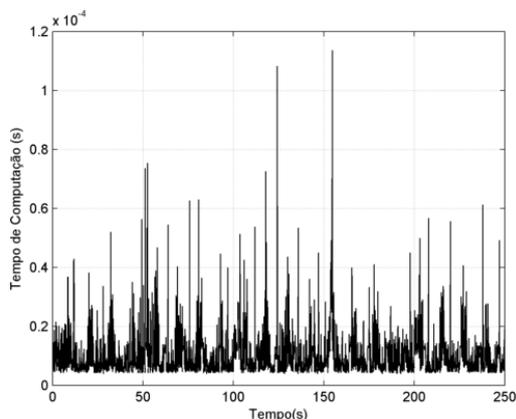


Figura 7: Tempo computacional (s) exigido na realização do ensaio.

6 Conclusão

Neste trabalho, apresentou-se um estudo de caso envolvendo a utilização de controle preditivo explícito para realização de manobras em um helicóptero de laboratório. Experimentalmente, observou-se que a lei de controle demandava carga computacional modesta, com tempo de cálculo duas ordens de grandeza menor do que o período de amostragem empregado. Tal resultado comprova a aplicabilidade desta técnica de MPC para sistemas de dinâmica rápida.

Trabalhos futuros podem contemplar um estudo mais apurado da influência dos parâmetros N , M e das matrizes de ponderação de estados na complexidade do problema de otimização multiparamétrica resultante, bem como no desempenho obtido em malha fechada.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPESP (processos 2010/13351-8 e 2011/17610-0) e CNPq.

Referências

- Borelli, F., Bemporad, A. e Morari, M. (2010). Predictive Control for linear and hybrid systems, Cambridge.
- Chao, Z., Ming, L., Shaolei, Z. e Wenguang, Z. (2011). Collision-free UAV Formation Flight Control based on Nonlinear MPC, International Conference on Electronics, Communications and Control (IECC), pp. 1951–1956.
- Del Re, L., Guardiola, C., Allgower, F., Glielmo, L. e Kolmanovsky, I. (2010). Automotive Model Predictive Control: Models, Methods and Applications, Springer-Verlag.
- Dua, V., Pistikopoulos, E. N. e Georghiadis M. C. (2007). Multiparametric Model Based Control, Wiley-VCH Verlag.
- Goodwin, G. C., Carrasco, D. S. e Seron, M. M. (2012). Predictive Control: a historical perspective, International Journal of Robust and Nonlinear Control, v. 22, pp. 1296–1313.
- Kale, M. M. e Chipperfield, A. J. (2005). Stabilized MPC formulations for robust reconfigurable flight control, Control Engineering Practice, v. 13, pp. 771–788.
- Kouramas, K. I., Faísca, N. P., Panos, C. e Pistikopoulos, E. N. (2011). Explicit/multiparametric model predictive control (MPC) of linear discrete-time systems by dynamic and multi-parametric programming, Automatica, v. 47, pp. 1638–1645.
- Kvanisca, M., Grieder, P. e Baoti, M. (2004). Multi-Parametric Toolbox (MPT).
- Li, H., Haddad, W. M. (2012). Model Predictive Control for a Multi-Compartment Respiratory System, American Control Conference, pp. 5574–5579.
- Lopes, R. V. (2007). Modelagem e Controle Preditivo de um helicóptero com três graus de liberdade, Dissertação de mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- Maciejowski, J. M. (2002). Predictive Control, Prentice Hall.
- Maia, M. H. (2008). Controle Preditivo robusto de um helicóptero com três graus de liberdade sujeito a perturbações externas, Dissertação de mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- Pascoal, R. M. (2010). Controle Preditivo Robusto para um helicoptero com três graus de liberdade, Dissertação de mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. e Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control: applications to industrial processes, Automatica, v. 14, pp. 413–428.
- Spjotvold, J. (2008). Parametric programming in control theory, Dissertação de mestrado, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega.
- Tondel, P. (2003). Constrained optimal Control via multiparametric quadratic programming, Tese de doutorado, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega.