

# PARTIÇÃO AUTOMÁTICA DO ESPAÇO DE ESTADOS DE UM CONTROLADOR PREDITIVO ROBUSTO PARA APLICAÇÃO EM TEMPO REAL

DIEGO PORTELA SENAREZI\*, ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO\*, TAKASHI YONEYAMA\*

\**Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Eletrônica  
12228-900, São José dos Campos, SP*

Emails: [diego.senarezi@embraer.com.br](mailto:diego.senarezi@embraer.com.br), [kawakami@ita.br](mailto:kawakami@ita.br), [takashi@ita.br](mailto:takashi@ita.br)

**Abstract**— Real-time applications of robust model predictive control (RMPC) with fast dynamics processes may benefit from the use of formulations in which the most computationally demanding tasks are carried out off-line. The present work is concerned with an RMPC approach in which the state space is partitioned into asymptotically stable invariant ellipsoids associated to a sequence of feedback gain matrices. In order to achieve robustness with respect to model uncertainties, the ellipsoids and associated gains are obtained by solving optimization problems with linear matrix inequality constraints. These problems can be solved off-line, thus reducing the computational workload required for real-time control. However, so far no systematic procedure for choosing the state-space partition was proposed. This work proposes the use of a genetic algorithm to obtain an optimized partition that satisfies sufficient conditions for robust stability. For illustration, a simulation study involving a model of a bench-top helicopter is presented.

**Keywords**— Robust predictive control, Linear matrix inequalities, Genetic algorithms.

**Resumo**— Aplicações em tempo real de controle preditivo robusto (RMPC) com processos de dinâmica rápida podem se beneficiar do uso de formulações nas quais as tarefas computacionalmente mais custosas sejam realizadas *off-line*. Este trabalho envolve uma abordagem de RMPC em que o espaço de estados é particionado em elipsoides invariantes assintoticamente estáveis associados a uma sequência de matrizes de ganhos de realimentação. De modo a obter robustez com respeito a incertezas de modelo, os elipsoides e respectivos ganhos são obtidos resolvendo-se problemas de otimização com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares. Estes problemas podem ser resolvidos *off-line*, reduzindo a carga computacional requerida para o controle em tempo real. Contudo, até agora nenhum procedimento sistemático havia sido desenvolvido para escolher a partição do espaço de estados. Este trabalho propõe o uso de um algoritmo genético para obter uma partição otimizada, satisfazendo condições suficientes para estabilidade robusta. A título de exemplo, apresenta-se um estudo de simulação envolvendo o modelo de um helicóptero de bancada.

**Palavras-chave**— Controle preditivo robusto, Desigualdade matricial linear, Algoritmos genéticos.

## 1 Introdução

O controle preditivo baseado em modelo (*Model Predictive Control*, MPC) caracteriza-se pelo uso de um modelo com o objetivo de prever as saídas do sistema em instantes futuros, dada uma sequência de ações de controle ajustadas de modo a minimizar uma função objetivo. Usualmente é utilizado o conceito de horizonte retrocedente, em que a cada instante de amostragem apenas a primeira ação de controle da sequência calculada é aplicada ao sistema. O processo de otimização é então repetido no instante seguinte a fim de se utilizar informação da realimentação (Camacho e Bordons, 2004).

Estabilidade e atendimento a restrições podem ser garantidas introduzindo-se elementos convenientes no problema de otimização a ser resolvido com horizonte retrocedente (Mayne *et al.*, 2000). Contudo, em geral tais garantias se aplicam ao caso nominal, assumindo casamento entre o modelo de predição e a dinâmica da planta. Nesse âmbito, Kothare *et al.* (1996) propuseram uma estratégia de MPC robusto (*Robust Model Predictive Control*, RMPC) baseada em desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities*, LMIs) de modo a levar em conta incertezas

de modelo. Tal contribuição se mostrou de grande relevância na área de MPC e teve desdobramentos em vários trabalhos posteriores (Lee e Park, 2007), (Wan e Kothare, 2008), (Ding *et al.*, 2008).

Uma limitação da abordagem proposta em Kothare *et al.* (1996) era a elevada carga computacional requerida para obtenção do controle ótimo a cada instante de amostragem, limitando sua aplicação a sistemas com dinâmicas lentas. Uma forma de contornar essa limitação, apresentada em Wan e Kothare (2003), consiste em se particionar o espaço de estados em uma sequência de elipsoides invariantes assintoticamente estáveis com matrizes de ganho associadas. Os elipsoides e respectivos ganhos são obtidos a partir de problemas de otimização com LMIs que podem ser resolvidos *off-line*. Em tempo real, basta verificar em qual elipsoide se encontra o estado e então empregar o ganho correspondente. No entanto, a determinação da partição do espaço de estados não é inteiramente automática, sendo necessário arbitrar um conjunto de pontos no espaço a serem utilizados na construção dos elipsoides. Nenhum procedimento sistemático para esse propósito foi descrito em Wan e Kothare (2003).

Nesse contexto, o presente trabalho propõe o uso de um algoritmo genético para buscar uma

partição adequada do espaço de estados. Para isso, procura-se minimizar o custo associado ao uso da lei de controle resultante, satisfazendo simultaneamente uma condição suficiente para estabilidade robusta apresentada em Wan e Kothare (2003). A título de exemplo, o método proposto é ilustrado em um estudo envolvendo o modelo de simulação de um helicóptero de bancada.

## 2 Fundamentação teórica: RMPC empregando LMIs

Considera-se que a dinâmica do sistema a ser controlado seja descrita por um modelo da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (1)$$

sendo  $u(k) \in \mathbb{R}^p$  e  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ . As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  são supostas desconhecidas, mas pertencentes a um polítopo  $\Omega$  dado por

$$\Omega = \text{Co} \{ [A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_L \ B_L] \}. \quad (2)$$

### 2.1 RMPC sem restrições

Seja o sistema descrito pela equação (1) com  $[A \ B] \in \Omega$ , como definido em (2). Na formulação proposta em Kothare *et al.* (1996), a robustez a incertezas do modelo é obtida resolvendo o seguinte problema “min-max” a cada instante de tempo  $k$ :

$$\min_{u(k+i|k), i \geq 0} \max_{[A \ B] \in \Omega} J_\infty(k), \quad (3)$$

sendo  $J_\infty(k)$  uma função de custo definida como

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [x(k+i|k)^T Q_1 x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k)] \quad (4)$$

com  $Q_1 > 0$  e  $R > 0$  matrizes de ponderação simétricas.

Para contornar a dificuldade de se resolver diretamente esse problema “min-max”, a proposta apresentada em Kothare *et al.* (1996) consistia em minimizar um limitante superior para o custo, considerando uma lei de controle da forma  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$ ,  $i \geq 0$ , como estabelecido no seguinte Teorema:

**Teorema 1** *Seja  $x(k) = x(k|k)$  o estado do sistema incerto (1) medido no instante de amostragem  $k$ . Considere que o conjunto de incertezas  $\Omega$  seja definido por um polítopo como em (2) e que não existam restrições sobre as entradas e estados da planta. Então, um limitante superior  $\gamma$  para a função de custo  $J_\infty(k)$  definida em (4) é minimizado empregando-se uma lei de controle  $u(k+i|k) = Fx(k+i|k)$ ,  $i \geq 0$ , sendo  $F = YQ^{-1}$*

*obtida por meio da solução (se existir) do seguinte problema de programação semidefinida:*

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma, \quad (5)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (7)$$

A prova desse teorema pode ser encontrada em Kothare *et al.* (1996).

### 2.2 RMPC com restrições

Como mostrado em Kothare *et al.* (1996), restrições na entrada da planta da forma

$$|u_l(k+i|k)| \leq u_{l,max}, \quad i \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (8)$$

podem ser impostas incluindo-se a seguinte LMI, com uma variável adicional  $X = X^T$ :

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad x_{ll} \leq u_{l,max}^2, \quad l = 1, 2, \dots, p. \quad (9)$$

Finalmente, restrições de saída da forma:

$$|y_l(k+i|k)| \leq y_{l,max}, \quad i \geq 1, \quad l = 1, 2, \dots, q. \quad (10)$$

com  $y_l = C_l x$ ,  $C_l \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , podem ser impostas incluindo-se as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} Q & (A_j Q + B_j Y)^T C_l^T \\ C_l (A_j Q + B_j Y) & y_{l,max}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, q, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (11)$$

### 2.3 Formulação off-line do RMPC empregando LMIs

Por requerer a solução *on-line* de um problema de otimização a cada instante de amostragem, o esforço computacional para implementar o RMPC descrito acima é elevado. Como alternativa, Wan e Kothare (2003) apresentaram uma abordagem em que a maior parte dos cálculos envolvidos na obtenção da lei de controle é realizada de forma *off-line*, isto é, antes da implementação em tempo real. Essa estratégia diminui significativamente o custo computacional em tempo real do RMPC, o

que aumenta o seu campo de aplicação a plantas de dinâmica mais rápida.

Para apresentar essa abordagem *off-line*, é necessário introduzir o conceito de elipsoides invariantes assintoticamente estáveis:

**Definição 1** *Dado um sistema dinâmico discreto  $x(k+1) = f(x(k))$ , um subconjunto  $\xi = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q^{-1} x \leq 1\}$  do espaço de estados  $\mathbb{R}^n$  é dito ser um elipsoide invariante assintoticamente estável, se possui a propriedade que, sempre que  $x(k_1) \in \xi$ , então  $x(k) \in \xi$  para todos  $k \geq k_1$  e  $x(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

**Lema 1** *Considere um sistema em malha fechada compreendendo uma planta (1) com controle  $u(k) = YQ^{-1}x(k)$ , sendo  $Y$  e  $Q^{-1}$  obtidos como no Teorema 1 para um dado estado inicial  $x(0)$ . Então, o conjunto  $\xi = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q^{-1} x \leq 1\}$  é um elipsoide invariante assintoticamente estável.*

Para um sistema com restrição na entrada da forma (8) e estado inicial  $x(0)$  distante da origem, o elipsoide resultante poderá estar associado a uma matriz de realimentação com ganhos excessivamente pequenos. Porém, não é necessário manter essa matriz de realimentação constante conforme o estado converge para a origem (Kothare *et al.*, 1996). Adicionando elipsoides um dentro do outro, é possível escolher uma família de matrizes de realimentação a serem usadas de acordo com a distância entre o estado e a origem (Wan e Kothare, 2003), definida como sendo a norma ponderada  $\|x\|_{Q^{-1}} \triangleq \sqrt{x^T Q^{-1} x}$ . A seguir é apresentado o algoritmo proposto em Wan e Kothare (2003) para esse propósito:

**Algoritmo 1** *Considere um sistema incerto (1) sujeito a restrições na entrada (8) e saída (10). Dado um estado inicial factível  $x_{(1)}$ , gere, *off-line*, uma sequência de minimizadores  $\gamma_i, Q_i, X_i, Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) de acordo com os passos abaixo.*

1. Faça  $i := 1$ .
2. Calcule os minimizadores  $\gamma_i, Q_i, X_i, Y_i$  para  $x_{(i)}$  usando o Teorema 1 com uma restrição adicional  $Q_{i-1} > Q_i$  (restrição ignorada para  $i = 1$ ). Armazene  $Q_i^{-1}, F_i = Y_i Q_i^{-1}, X_i, Y_i$ .
3. Se  $i < N$ , escolha um estado  $x_{(i+1)}$  que satisfaça  $\|x_{(i+1)}\|_{Q_i^{-1}}^2 < 1$ . Faça  $i := i + 1$  e retorne ao passo 2.

*Em tempo real, a cada instante de amostragem  $k$ , faça uma busca por  $Q_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) nos resultados armazenados para encontrar o maior índice  $i$  (ou equivalentemente, o menor elipsoide  $\{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q_i^{-1} x \leq 1\}$ ) tal que  $\|x(k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1$ . Feito isso, aplique o controle  $u(k) = F_i x(k)$ .*

Cabe observar que os parênteses na notação  $x_{(i)}$  estão sendo empregados para distinguir o  $i$ -ésimo vetor de estado empregado no Algoritmo 1 da  $i$ -ésima componente do vetor de estado, que será denotada por  $x_i$ .

**Teorema 2** *Dado um sistema dinâmico (1) e um estado inicial  $x(0)$  satisfazendo  $\|x(0)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1$ , o emprego do Algoritmo 1 estabiliza de forma robusta e assintótica o sistema dinâmico em malha fechada.*

Vale notar que a lei de controle assim estabelecida emprega uma matriz de realimentação de estados constante entre dois elipsoides adjacentes, com descontinuidade na fronteira entre os dois elipsoides. O algoritmo a seguir permite obter uma lei de controle em que a matriz de realimentação varia de forma contínua ao longo do espaço de estados.

**Algoritmo 2** *Considere os resultados armazenados após a execução dos passos 1 a 3 do Algoritmo 1 e suponha que as restrições*

$$Q_i^{-1} - (A_j + B_j F_{i+1})^T Q_i^{-1} (A_j + B_j F_{i+1}) > 0, \\ j = 1, \dots, L \quad (12)$$

*sejam satisfeitas para  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ . Em tempo real, dado o estado  $x(k)$  no instante  $k$  atual, faça uma busca por  $Q_i^{-1}$  nos resultados armazenados para encontrar o maior índice  $i$  (ou equivalentemente, o menor elipsoide  $\{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q_i^{-1} x \leq 1\}$ ) tal que  $\|x(k)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1$ . Caso  $i \neq N$ , então resolva  $x(k)^T (\alpha_i Q_i^{-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i+1}^{-1}) x(k) = 1$  para obter  $\alpha_i$  e empregue a lei de controle  $u(k) = (\alpha_i F_i + (1 - \alpha_i) F_{i+1}) x(k)$ . Caso  $i = N$ , então aplique a lei de controle  $u(k) = F_N x(k)$  correspondente ao último elipsoide definido.*

**Teorema 3** *Dado um sistema dinâmico (1) e um estado inicial  $x(0)$  satisfazendo  $\|x(0)\|_{Q_i^{-1}}^2 \leq 1$ , o emprego do Algoritmo 2 estabiliza de forma robusta e assintótica o sistema dinâmico em malha fechada.*

Informações mais detalhadas, provas e demonstrações dos algoritmos e teoremas apresentados acima podem ser consultadas em Wan e Kothare (2003).

### 3 Método proposto

O problema em questão consiste em escolher uma sequência apropriada de pontos  $\mathcal{X} = \{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}\}$  para uso nos passos 1 a 3 do Algoritmo 1 de modo a satisfazer as restrições (12) no Algoritmo 2. Para esse propósito, considera-se que estes pontos estejam distribuídos ao longo de

uma semi-reta a partir da origem do espaço de estados, sendo  $x_{(1)}$  o ponto mais externo, isto é:

$$x_{(i+1)} = \delta_i x_{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

com  $0 < \delta_{N-1} < \dots < \delta_2 < \delta_1 < 1$ . O problema consiste então em escolher o ponto  $x_{(1)}$  no  $\mathbb{R}^n$ , bem como os escalares  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1} \in (0, 1)$ .

Para esse propósito, propõe-se a utilização de um algoritmo genético (AG) de acordo com o fluxograma apresentado na Figura 1.

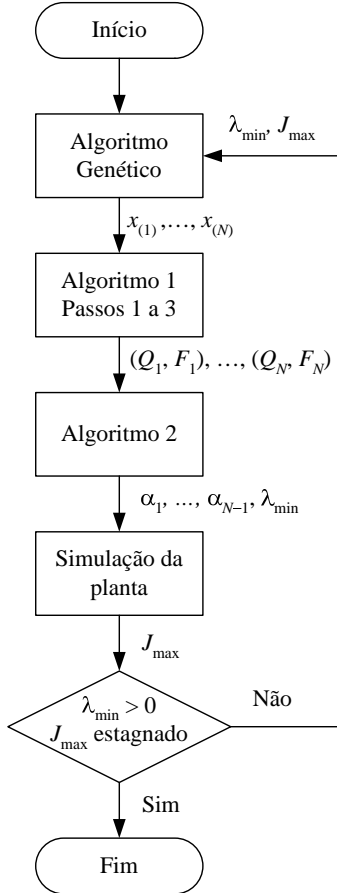


Figura 1: Uso do AG no método proposto.

Além das matrizes  $A_j, B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, L$ ) do modelo incerto, dos pesos  $Q_1, R$  da função de custo e das restrições  $u_{l,max}$  ( $l = 1, 2, \dots, p$ ) e  $y_{l,max}$  ( $l = 1, 2, \dots, q$ ) sobre controles e saídas, deve-se definir o número  $N$  de elipsoides a serem construídos e o ponto  $x_{(1)}$  no espaço de estados que define a semi-reta ao longo da qual os demais pontos serão dispostos.

O cromossomo de cada indivíduo no algoritmo genético codifica uma sequência de escalares  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1} \in (0, 1)$  ou, alternativamente, um conjunto de pontos  $\mathcal{X} = x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}$ . Cada cromossomo é avaliado empregando-se o respectivo conjunto  $\mathcal{X}$  nos Algoritmos 1 e 2. O atendimento das restrições (12) é verificado calculando-se os autovalores de todas as  $L(N-1)$  matrizes que constituem o lado esquerdo das desigualdades e tomando-se o menor autovalor encontrado ( $\lambda_{min}$ ).

As restrições (12) serão satisfeitas se  $\lambda_{min} > 0$ . Adicionalmente, a lei de controle resultante é empregada em simulações da planta em malha fechada, considerando todos os vértices do polítopo de incertezas. O maior custo obtido como resultado dessas simulações é denotado por  $J_{max}$ .

Resumidamente, o AG busca maximizar  $\lambda_{min}$  de forma a torná-lo positivo, garantindo assim que a condição de estabilidade robusta no Algoritmo 2 seja satisfeita. Após satisfazer essa condição, o AG procura minimizar o custo  $J_{max}$ . Para tal, a cada geração o vetor de indivíduos é organizado de forma que os de  $\lambda_{min}$  negativo são ordenados por seu valor de  $\lambda_{min}$ , enquanto os de  $\lambda_{min}$  positivo são ordenados pelo custo  $J_{max}$ . Assim, a população ordenada apresenta a seguinte forma:

$$\left[ \begin{array}{l} \lambda_{min} \text{ muito negativo} \\ \lambda_{min} \text{ pouco negativo} \\ \lambda_{min} \text{ positivo, custo } J_{max} \text{ alto} \\ \lambda_{min} \text{ positivo, custo } J_{max} \text{ baixo} \end{array} \right]$$

A seleção dos indivíduos para cruzamento e formação da nova geração é então realizada de acordo com a prioridade definida após a ordenação.

O algoritmo genético foi empregado com população de 30 indivíduos, cruzamento (*crossover*) com probabilidade 0.95 e mutação com probabilidade 0.05. Foi adotada uma estratégia de seleção elitista e um critério de parada baseado em estagnação (pequena redução no custo  $J_{max}$ , após se ter obtido  $\lambda_{min} > 0$ ).

#### 4 Exemplo de simulação

A Figura 2 apresenta o helicóptero de bancada aqui considerado.

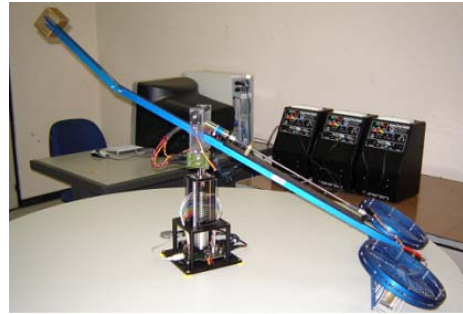


Figura 2: Helicóptero considerado no trabalho.

Para fins de projeto e simulação, foi utilizado um modelo com variáveis de estado e entrada definidas como:

- $x_1$  - ângulo de arfagem;
- $x_3$  - ângulo de elevação;
- $x_5$  - ângulo de deslocamento;
- $x_2, x_4$  e  $x_6$  as respectivas derivadas.
- $u_1$  e  $u_2$  - tensões de entrada dos amplificadores dos motores traseiro e dianteiro.

Os parâmetros do modelo e as matrizes de peso utilizadas neste trabalho foram os mesmos obtidos em Maia (2008).

Considerou-se uma manobra de  $25^\circ$  de deslocamento, mantendo o braço de sustentação do helicóptero em um ângulo de elevação  $7^\circ$  abaixo da horizontal. Para o modelo linearizado em torno do equilíbrio, a condição inicial para esta manobra corresponde a  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -25^\circ \ 0]^T$ . Para aplicação do método proposto, foi escolhido  $x_{(1)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -30^\circ \ 0]^T$  como ponto mais externo. Adicionalmente, optou-se também por fixar  $x_{(N)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.1^\circ \ 0]^T$ . Estas escolhas seguem as adotadas no trabalho de Pascoal (2010), que adotou uma distribuição linear de pontos entre  $x_{(1)}$  e  $x_{(N)}$ .

Os controles  $u_1, u_2$  foram restritos a  $\pm 1.5V$  com respeito ao valor de equilíbrio para o ponto de operação considerado. Além disso, o ângulo de arfagem foi restrito a  $\pm 15^\circ$ . Para maior realismo, foram empregados filtros derivativos para a determinação das velocidades angulares de arfagem, elevação e deslocamento, como em (Maia, 2008), uma vez que o sistema em questão conta apenas com sensores de posição angular. Todas as simulações foram realizadas em ambiente Matlab/Simulink.

#### 4.1 Partições obtidas

A Tabela 1 apresenta o resultado obtido pelo AG, apresentando o menor autovalor encontrado ( $\lambda_{min}$ ) bem como o custo resultante ( $J_{max}$ ). Para comparação, também é apresentado o resultado de se empregar pontos linearmente distribuídos. A Figura 3 apresenta as partições obtidas entre os valores extremos de  $-30^\circ$  e  $-0.1^\circ$  para o ângulo de deslocamento.

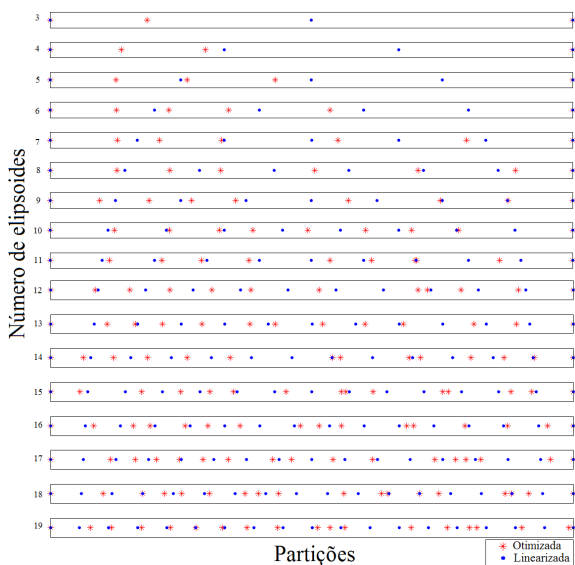


Figura 3: Comparação entre as partições otimizadas e as partições lineares.

Observa-se na Tabela 1 que, para um número muito pequeno de elipsoides, o AG não encontra uma partição que satisfaça as restrições (12) do Algoritmo 2. Isso acontece pois o primeiro e último ponto são fixados, fazendo com que haja poucos graus de liberdade para a construção dos elipsoides.

Nota-se que acima de um determinado número de elipsoides, a partição distribuída linearmente já satisfaz a condição imposta. Isso acontece pois, segundo Wan e Kothare (2003) as restrições (12) são trivialmente satisfeitas se os pontos  $x_{(i)}$  utilizados na determinação dos elipsoides estiverem suficientemente próximos entre si. Então, quanto maior o número de elipsoides utilizados, maior a chance de se satisfazer a condição. A vantagem de se utilizar o AG é encontrar soluções que satisfazem a condição de estabilidade robusta e minimizam o custo mesmo para pequenos números de elipsoides. Dependendo da aplicação, isso pode significar economia de memória no armazenamento das matrizes  $Q_i$ , bem como a diminuição do tempo necessário para determinar em qual anel elipsoidal o estado se encontra durante a execução em tempo real.

#### 4.2 Resultados de simulação

A simulação foi realizada considerando incerteza de  $\pm 50\%$  no ganho dos atuadores e empregando 11 elipsoides. A resposta do sistema utilizando a partição gerada pelo método proposto é apresentada em azul na Figura 4. Para comparação, apresenta-se em vermelho a resposta obtida utilizando a partição de 11 elipsoides distribuída de forma linear, que foi a escolha adotada em (Pascoal, 2010). Como se pode observar, os resultados são similares. Contudo, deve-se ter em mente que o método proposto tem a vantagem de encontrar soluções com garantia de estabilidade empregando menor número de elipsoides, como discutido acima.

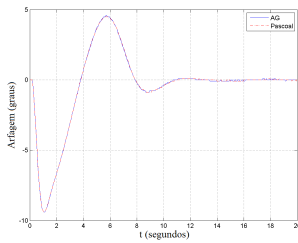
## 5 Conclusões

Neste trabalho, apresentou-se um método para obtenção de uma partição do espaço de estados otimizada que satisfaz a condição necessária para utilização da formulação de controle preditivo robusto *off-line*. O método foi ilustrado empregando-se um modelo de simulação de um helicóptero de bancada. Observando os resultados obtidos, verifica-se que a principal vantagem do método proposto reside na possibilidade de se atender a condição de estabilidade robusta com número reduzido de elipsoides.

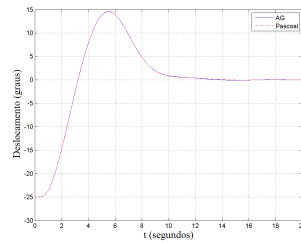
Em trabalhos futuros, pretende-se realizar investigações com plantas diferentes e também validar experimentalmente as leis de controle obtidas.

Tabela 1: Resultados obtidos na determinação dos elipsoides a serem empregados na lei de controle.

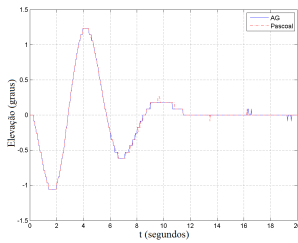
Número de elipsoides	Método para obtenção da partição			
	Algoritmo Genético		Distribuição Linear	
	$\lambda_{min}$	$J_{max}$	$\lambda_{min}$	$J_{max}$
3	$-2.087 \times 10^{-3}$	5576.24	$-6.682 \times 10^{-3}$	5623.81
4	$-2.991 \times 10^{-5}$	5443.76	$-5.392 \times 10^{-3}$	5451.80
5	$3.208 \times 10^{-6}$	5404.70	$-4.116 \times 10^{-3}$	5423.55
6	$3.050 \times 10^{-6}$	5391.93	$-2.822 \times 10^{-3}$	5408.81
7	$4.368 \times 10^{-6}$	5391.40	$-1.493 \times 10^{-3}$	5399.76
8	$2.782 \times 10^{-6}$	5390.87	$-2.904 \times 10^{-4}$	5398.40
9	$4.422 \times 10^{-6}$	5384.97	$4.065 \times 10^{-6}$	5395.72
10	$3.841 \times 10^{-6}$	5386.51	$4.129 \times 10^{-6}$	5392.60
11	$4.311 \times 10^{-6}$	5383.57	$3.848 \times 10^{-6}$	5388.79
12	$4.303 \times 10^{-6}$	5383.39	$3.832 \times 10^{-6}$	5389.45
13	$4.338 \times 10^{-6}$	5381.85	$3.922 \times 10^{-6}$	5388.46
14	$4.236 \times 10^{-6}$	5383.50	$3.944 \times 10^{-6}$	5388.47
15	$3.539 \times 10^{-6}$	5381.77	$3.618 \times 10^{-6}$	5386.90
16	$4.337 \times 10^{-6}$	5381.64	$3.846 \times 10^{-6}$	5385.54
17	$4.349 \times 10^{-6}$	5380.38	$4.088 \times 10^{-6}$	5385.92
18	$4.209 \times 10^{-6}$	5380.45	$4.137 \times 10^{-6}$	5386.59
19	$4.328 \times 10^{-6}$	5379.75	$4.087 \times 10^{-6}$	5385.82



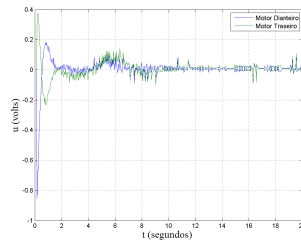
(a) Arfagem



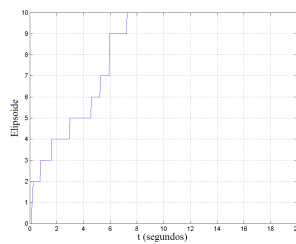
(b) Deslocamento



(c) Elevação



(d) Controles



(e) Localização do estado em relação aos elipsoides

Figura 4: Resposta do sistema em malha fechada empregando onze elipsoides.

### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPESP (2011/17610-0) e CNPq (Produtividade em Pesquisa).

### Referências

- Camacho, E. and Bordons, C. (2004). *Model Predictive Control*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer.
- Ding, B., Xi, Y., Cychowski, M. T. and O'Mahony, T. (2008). A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control, *Automatica* **44**: 258–264.
- Kothare, M. V., Balakrishnan, V. and Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica* **32**(10): 1361 – 1379.
- Lee, S. and Park, J. H. (2007). Output feedback model predictive control for LPV systems using parameter-dependent Lyapunov function, *Applied Mathematics and Computation* **190**: 671–676.
- Maia, M. H. (2008). *Controle preditivo robusto de um helicóptero com três graus de liberdade sujeito a perturbações externas*, Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. and Sckaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality, *Automatica* **36**: 789 – 814.
- Pascoal, R. M. (2010). *Controle preditivo robusto para um helicóptero com três graus de liberdade*, Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- Wan, Z. and Kothare, M. V. (2003). An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica* **39**(5): 837 – 846.
- Wan, Z. and Kothare, M. V. (2008). A framework for design of scheduled output feedback model predictive control, *Journal of Process Control* **18**: 258–264.