MODELAGEM E IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA BALL AND PLATE CONTROLADO POR SERVO-VISÃO

Rafael da Silveira Castro*, Jacson Miguel Olszanecki Barth*, Jeferson Viera Flores*, Aurélio Tergolina Salton*

*PUCRS - Grupo de Automação e Controle de Sistemas
Av. Ipiranga, 6681, 90619-900
Porto Alegre (RS), Brasil

Emails: rafa.castro@brturbo.com.br, jacsonmiguel.b@hotmail.com, jeferson.flores@pucrs.br, aurelio.salton@pucrs.br

Abstract— This paper presents the construction and control of a Ball and Plate system. The constructed prototype aims to balance a free rolling ball on a platform by orienting the plate. The Linear Quadratic Gaussian Control theory is applied on this project. The ball sensing method uses a position-based servo-vision algorithm. Experimental results illustrate the system behavior following different trajectories.

Keywords— Ball and Plate System, Dynamic Modelling, Digital Control, LQG, Servo-Vision.

Resumo— Este artigo apresenta a construção e o controle de um sistema *Ball and Plate*. O protótipo construído tem o objetivo de regular a posição ou trajetória de uma esfera rolante sobre uma plataforma pelo comando da orientação desta placa. A teoria de controle *Linear Quadratic Gaussian* é aplicada neste projeto e o monitoramento do sistema utiliza o método de servo-visão baseado em posição. Os resultados comprovam a eficiência do sistema no seguimento de diferentes trajetórias.

Palavras-chave— Sistema *Ball and Plate*, Modelagem Dinâmica, Controle Digital, *LQG*, Servo-Visão.

1 Introdução

O desafio de controle de sistemas de equilíbrio está em constante estudo pela ciência, para aplicações que variam da robótica até o transporte (Andrews et al., 2004). Neste contexto destaca-se a manipulação de uma esfera rolante sobre uma plataforma orientável, sistema conhecido como *Ball and Plate* (Bola e Placa). Implementações práticas deste sistema são muito utilizadas como ferramentas laboratoriais para fins educacionais bem como para pesquisas no ramo de engenharia de controle (Ker et al., 2007).

O objetivo principal do controle de um sistema *Ball and Plate* é permitir o posicionamento da esfera em qualquer ponto da placa, além de impor à bola o seguimento de trajetórias. Esta tarefa deve ser realizada apenas pela alteração da orientação da plataforma.

Em geral, a estrutura mecânica dos sistemas *Ball and Plate* encontrados na literatura possuem um plataforma inclinável em ambos os eixos longitudinal e latitudinal. Muitos destes projetos utilizam motores de corrente contínua (Andrews et al., 2004; Wang et al., 2007; Awatar et al., 2002) ou servo-motores (Zia, 2011; Braescu et al., 2012). A vantagem na utilização deste último é o baixo custo e a praticidade para aplicação no projeto, dado que estes dispositivos já possuem internamente um controle em malha-fechada, em contrapartida aos projetos com motores tradicionais. A desvantagem na utilização dos servos é a pouca disponibilidade de potência para construção de estruturas de maior porte. Apesar da preferência pelos motores em implementações *Ball and Plate* podem ser encontrados projetos com atuadores lineares magnéticos (Ker et al., 2007), além de um braço robótico para orientação direta da plataforma (Park and Lee, 2003; Lee et al., 2008).

Diversas teorias de controle já foram aplicadas para o controle do sistema em questão. Waldwogel (2010) realiza a comparação entre os métodos *Proportional Integral Derivative* (*PID*), *Linear Quadratic Gaussian* (*LQG*), *Model Predictive Control* (*MPC*) para trajetórias quadradas e circulares. Seus resultados comprovam um menor erro de seguimento nos controles *LQG* e *MPC* em relação ao *PID*, no entanto pouca diferença entre *MPC* e *LQG*. Este último, contudo leva certa vantagem pela maior facilidade em sua síntese e melhor eficiência computacional que o *MPC*. Entre outras estratégias já aplicadas com sucesso para o controle de sistemas *Ball and Plate* estão: *Backstepping Control* (Moarref et al., 2008), *Sliding-Mode Control* (Park and Lee, 2003) e *Auto-Disturbance Rejection Controller* (*ADCR*) (Duan et al., 2009).

Um dos principais fatores para o sucesso da implementação de um controle para o sistema *Ball and Plate* é a técnica de sensoriamento da esfera. Para viabilização desta tarefa a literatura está dividida principalmente entre dois métodos distintos. Uma destas maneiras consiste na utilização de uma tela sensível ao toque (*touch screen display*) acoplado ou constituindo a placa (Andrews et al., 2004; Zia, 2011; Braescu et al., 2012; Awatar et al., 2002). O outro método largamente utilizado é o monitoramento por um dispositivo de aquisição de imagens como uma *webcam*

(Park and Lee, 2003; Wang et al., 2007; Moarref et al., 2008; Waldwogel, 2010). O display *touch screen* apresenta vantagem de permitir um período de amostragem menor que o tempo de aquisição de quadros das *webcams* comerciais, além de não necessitar da lógica extra de processamento de imagem. A utilização da *webcam* constitui uma solução mais complexa, no entanto mais versátil e com menor custo que a solução com tela de toque.

Este trabalho contribui com a modelagem e implementação física de um aparato *Ball and Plate* composto por uma placa orientável atuada por dois servo-motores (ver Figura 1). A estratégia de controle adotada basicamente segue a metodologia LQG e o monitoramento da esfera é realizado por servo-visão *position-based*, que consiste na determinação da posição cartesiana da esfera sobre a placa pelas imagens adquiridas da câmera (Park and Lee, 2003).

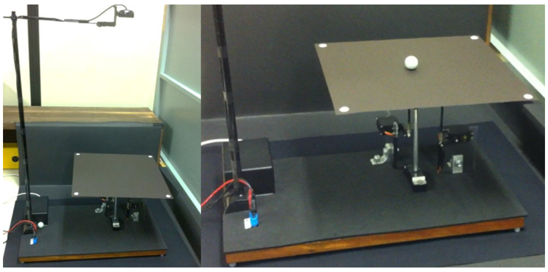

Figura 1: Protótipo *Ball and Plate* desenvolvido.

2 Estrutura Física

Esta seção apresenta os aspectos físicos do sistema *Ball and Plate* desenvolvido, incluindo descrições dos dispositivos utilizados e detalhes do projeto da plataforma orientável.

2.1 Dispositivos do Sistema

O sistema desenvolvido funciona pela interação de diversos dispositivos, conforme apresentado na Figura 2.

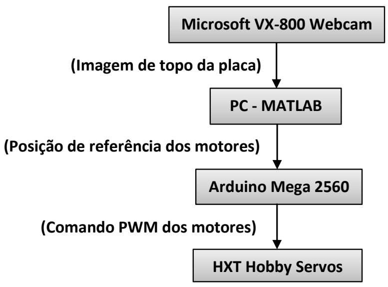

Figura 2: Diagrama dos dispositivos do sistema.

A *webcam Microsoft VX-800* utilizada possui taxa de aquisição constante de 30 quadros por segundo a resolução de 640x480 *pixels*. Para o processamento das imagens e controle do sistema foi utilizado um *PC* via o *software MATLAB*. Uma placa *Arduino Mega 2560* realiza a interface de comunicação entre o computador e os dispositivos de atuação do sistema. Estes atuadores são servo-motores *Hextronik HXT12K* com controle de posição interno em malha-fechada.

2.2 Projeto da Plataforma Orientável

A plataforma do sistema é uma chapa de acrílico de 280x280 mm e espessura de 4 mm. Esta placa é fixada em seu centro por uma junta universal para restringir a movimentação. A orientação é comandada por dois braços articulados, cada um conectado ao eixo do motor e à placa por outras duas juntas universais. O esquemático na Figura 3 apresenta simultaneamente as vistas frontal e lateral do mecanismo.

Para utilização desta plataforma orientável no controle do sistema *Ball and Plate* foi realizada a modelagem cinemática do mecanismo de modo a encontrar relações matemáticas para as posições angulares θ_α e θ_β dos servo-motores em função da orientação espacial α e β da plataforma.

Pela análise geométrica do mecanismo de movimentação da placa, conforme Figura 3, determina-se as seguintes relações cinemáticas simplificadas do sistema:

$$d_1\, sen(\theta_\alpha) = d_3\, sen(\alpha)\,,$$
$$d_1\, sen(\theta_\beta) = d_3\, sen(\beta)\,.$$

3 Modelagem Dinâmica

Esta seção apresenta as equações dinâmicas do sistema *Ball and Plate* e a representação de modelos no espaço de estados. Estes modelos obtidos são utilizados para o projeto do controle da planta.

3.1 Equações Diferenciais do Sistema

Para obtenção de um modelo de equações diferenciais da dinâmica do sistema é conveniente a aplicação da Mecânica Lagrangiana (Deriglazov, 2010) pela derivação da seguinte expressão genérica (Equação de *Euler-Lagrange*):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i\,. \qquad (1)$$

Este método consiste em determinar uma função Langrangiana $L(\dot{q}_i,q_i) = T(\dot{q}_i,q_i) - V(q_i)$ em função das coordenadas generalizadas ou graus de liberdade do sistema q_i e suas taxas de variação $\dot{q}_i$, onde T é a energia cinética total do sistema e V a energia potencial total. O termo dissipativo Q_i em (1) representa uma força composta externa atuante no sistema.

A energia cinética total T do sistema é determinada pela soma das energias cinéticas de translação T_t e de rotação T_r. A energia de translação depende da massa m_B da esfera e das velocidades

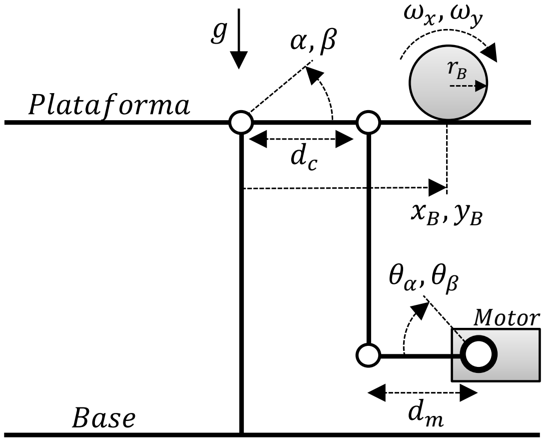

Figura 3: Esquemático do sistema *Ball and Plate*.

lineares $\dot{x}_B$ e $\dot{y}_B$ que o objeto translada, pela relação $T_t = \frac{1}{2}\, m_B \big(\dot{x}_B{}^2 + \dot{y}_B{}^2\big)$, já a energia de rotação depende do momento de inércia I_B da esfera e das velocidades angulares ω_x e ω_y que o objeto rotaciona, segundo a relação $T_r = \frac{1}{2}\, I_B\, \big(\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2\big)$.

Sendo o raio r_B da esfera conhecido, pode-se reescrever T_r em função das velocidades lineares $\dot{x}_B$ e $\dot{y}_B$ pela utilização das igualdades $\omega_x = \dot{x}_B / r_B$ e $\omega_y = \dot{y}_B / r_B$. O momento de inércia I_B também pode ser escrito pela expressão $I_B = \frac{2}{5}\, m_B\, r_B{}^2$, supondo uma esfera compacta.

A energia potencial total V do sistema é dada pela incidência da força gravitacional conforme a relação $V = m_B\, g\, \big(x_B\, sen(\alpha) + y_B\, sen(\beta)\big)$.

Construindo a função Lagrangiana pelas definições anteriores e aplicando na Equação de E*uler-Lagrange* em (1) para $q_i = [x_B\ y_B]$ e $Q_i = [F_x\ F_y]$ obtém-se as seguintes equações diferenciais que descrevem a movimentação da esfera:

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{5}\, \ddot{x}_B(t) + g\, sen\big(\alpha(t)\big) &= \tfrac{1}{m_B}\, F_x(t), \\ \tfrac{7}{5}\, \ddot{y}_B(t) + g\, sen\big(\beta(t)\big) &= \tfrac{1}{m_B}\, F_y(t). \end{aligned}$$

Visto que será trabalhado com inclinações pequenas na placa ($\pm 25°$) é válido simplificar: $sen(\alpha(t)) \approx \alpha(t)$ e $sen(\beta(t)) \approx \beta(t)$.

Já as forças dissipativas $F_x(t)$ e $F_y(t)$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F_x(t) &= -f_c\, \dot{x}_B(t) + d_x(t)\,, \\ F_y(t) &= -f_c\, \dot{y}_B(t) + d_y(t)\,, \end{aligned}$$

onde f_c é o fator de atrito cinético entre a esfera e placa e $d_x(t)$ e $d_y(t)$ são forças de distúrbios atuantes na esfera.

Para modelar a movimentação $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ em função de suas referências $r_\alpha(t)$ e $r_\beta(t)$ será assumido relações de segunda ordem genéricas, com frequência natural ω_n e fator de amortecimento ξ, conforme:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) + 2\,\xi\,\omega_n\,\dot{\alpha}(t) + \omega_n{}^2\,\alpha(t) &= \omega_n{}^2\, r_\alpha(t)\,, \\ \ddot{\beta}(t) + 2\,\xi\,\omega_n\,\dot{\beta}(t) + \omega_n{}^2\,\beta(t) &= \omega_n{}^2\, r_\beta(t)\,. \end{aligned}$$

3.2 Modelos em Espaço de Estados

Para aplicação das técnicas de projeto de controle foram obtidos dois modelos em espaço de estados a partir das equações diferenciais do sistema.

Ambos os modelos obtidos possuem sinais de entrada $u_x(t) = r_\alpha(t)$ e $u_y(t) = r_\beta(t)$, além de sinais de saída $z_x(t) = x_B(t)$ e $z_y(t) = y_B(t)$.

Para simplificar a notação segue que $u_{x|y}(t)$ denota tanto $u_x(t)$ quanto $u_y(t)$, da mesma forma que $z_{x|y}(t)$ denota tanto $z_x(t)$ quanto $z_y(t)$. A mesma notação será aplicada aos vetores de estados de cada modelo.

- **Modelo Básico:** Desconsidera a dinâmica dos motores, assumida como muito mais rápida que a dinâmica da esfera. Neste caso, as referências $r_\alpha(t)$ e $r_\beta(t)$ são exatamente os ângulos reais, respectivamente $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ da placa. Também desconsidera a presença dos distúrbios externos $d_x(t)$ e $d_y(t)$. Esta representação contempla as características básicas do sistema, portanto foi utilizada para o projeto da realimentação de estados (LQR). O modelo básico é definido por vetores de estados $\varphi_{x|y}(t)$ conforme as relações:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{x|y}(t) &= A_\varphi\, \varphi_{x|y}(t) + B_\varphi\, u_{x|y}(t)\,, \\ z_{x|y}(t) &= C_\varphi\, \varphi_{x|y}(t)\,, \end{aligned}$$

$$\varphi_x = \begin{bmatrix} x_B \\ \dot{x}_B \end{bmatrix},\ \ \varphi_y = \begin{bmatrix} y_B \\ \dot{y}_B \end{bmatrix},\ \ C_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{7}\frac{f_c}{m_B} \end{bmatrix},\ \ B_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{7} g \end{bmatrix},$$

- **Modelo Aumentado:** Considera a dinâmica da esfera e a dinâmica do mecanismo de movimentação da placa. Também possui estados adicionais que incluem os distúrbios $d_x(t)$ e $d_y(t)$ assumidos constantes, isto é, $\dot{d}_x(t) \approx 0$ e $\dot{d}_y(t) \approx 0$. Esta representação foi utilizada no projeto do observador de estados (Filtro de *Kalman*) que requer um modelo relativamente preciso para a qualidade das estimações. O modelo aumentado é definido por estados $\sigma_{x|y}(t)$ conforme as expressões:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{x|y}(t) &= A_\sigma\, \sigma_{x|y}(t) + B_\sigma\, u_{x|y}(t)\,, \\ z_{x|y}(t) &= C_\sigma\, \sigma_{x|y}(t)\,, \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} x_B \\ \dot{x}_B \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \\ d_x \end{bmatrix},\ \ \sigma_y = \begin{bmatrix} y_B \\ \dot{y}_B \\ \beta \\ \dot{\beta} \\ d_y \end{bmatrix},\ \ B_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_n{}^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7}\frac{f_c}{m_B} & -\frac{5}{7} g & 0 & \frac{5}{7}\frac{1}{m_B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_n{}^2 & -2\xi\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os estados $\varphi_{x|y}(t)$ do modelo básico e os estados $\sigma_{x|y}(t)$ do modelo aumentado estão relacionados pela seguinte expressão:

$$\varphi_{x|y}(t) = E_\sigma\, \sigma_{x|y}(t)\,, \qquad E_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

3.3 Discretização dos modelos

Visando a aplicação de técnicas de controle em tempo discreto, os modelos contínuos foram convertidos para a representação

$$\varphi_{x|y}(k+1) = \mathcal{A}_\varphi\, \varphi_{x|y}(k) + \mathcal{B}_\varphi\, u_{x|y}(k)\,,$$
$$\sigma_{x|y}(k+1) = \mathcal{A}_\sigma\, \sigma_{x|y}(k) + \mathcal{B}_\sigma\, u_{x|y}(k)\,,$$

onde k é o número da amostra dado por $k = t/T_s$ sendo T_s o período de amostragem do sistema.

Para encontrar as matrizes $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{B}_i$ dos modelos discretos em função das matrizes A_i e B_i dos modelos contínuos (para $i = \varphi|\sigma$) de forma a atender a igualdade $k = t/T_s$ pode-se aplicar a fórmula de Discretização Exata (DeCarlo, 1995) $\Phi_i = e^{T_s \Omega_i}$, onde Φ_i e Ω_i são:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Omega_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4 Projeto do Controle

O controle do sistema é realizado pelo método *Linear Quadratic Gaussian* (*LQG*) (Dorato et al., 1995) que consiste na combinação de uma realimentação ótima de estados pelo *Linear Quadratic Regulator* (*LQR*) com um observador ótimo de estados pelo Filtro de *Kalman*.

4.1 Realimentação de Estados - LQR

A lei de controle que regula o sistema consiste na realimentação dos estados estimados $\hat{\varphi}_{x|y}(k)$ por um vetor de ganhos K, conforme a equação

$$u_{x|y}(k) = -K\, \hat{\varphi}_{x|y}(k) + G_r\, r_{x|y}(k)\,, \tag{3}$$

onde as referências $r_{x|y}(k)$ são as respectivas posições $z_{x|y}(k)$ desejadas na esfera e G_r é o fator de correção, calculado por

$$G_r = \left(C_\varphi\, (I - \mathcal{A}_\varphi + \mathcal{B}_\varphi\, K)^{-1}\, \mathcal{B}_\varphi\right)^{-1},$$

para obtenção de ganho *DC* unitário entre as referências $r_{x|y}(k)$ e as saídas $z_{x|y}(k)$.

O controlador *LQR* consiste na solução do vetor de ganhos K que minimiza o funcional de custo

$$J_{LQR} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\varphi'_{x|y} Q\, \varphi_{x|y} + u'_{x|y} R\, u_{x|y}\right)$$

em função de matrizes Q e R que penalizam a energia dos estados do sistema e dos sinais de controle, respectivamente.

O ganho K ótimo que minimiza J_{LQR} é calculado pela expressão

$$K = (R + \mathcal{B}'_\varphi P \mathcal{B}_\varphi)^{-1} \mathcal{B}'_\varphi P \mathcal{A}_\varphi\,,$$

onde a variável P é a solução para a seguinte *Equação de Riccati*:

$$P = \mathcal{A}'_\varphi (P - P\mathcal{B}_\varphi (R + \mathcal{B}'_\varphi P \mathcal{B}_\varphi)^{-1} \mathcal{B}'_\varphi P) \mathcal{A}_\varphi + Q\,.$$

Esta última equação não possuí solução analítica, logo foi utilizada a função "`dare`" do software *MATLAB* para a resolução numérica.

As matrizes de penalização Q e R foram construídas conforme $Q = diag(q_1,q_2)$ e $R = r_1$, onde q_1 representa a importância na minimização do erro de posição da esfera, q_2 representa a importância na minimização das oscilações para evitar elevado sobre-sinal e r_1 a importância na minimização da amplitude da atuação de controle para evitar a saturação.

4.2 Observador de Estados - Filtro de Kalman

A estimação $\hat{\sigma}_{x|y}(k)$ dos estados reais $\sigma_{x|y}(k)$ é realizada pela predição *a priori* (segundo o modelo aumentado sistema) pela equação

$$\hat{\sigma}_{x|y}(k)_{priori} = \mathcal{A}_\sigma\, \hat{\sigma}_{x|y}(k-1) + \mathcal{B}_\sigma\, u_{x|y}(k-1)$$

e pela correção *a posteriori* por um vetor de ganhos L, conforme a expressão

$$\hat{\sigma}_{x|y}(k)_{posteriori} = \hat{\sigma}_{x|y}(k)_{priori} + L\, e_{x|y}(k)\,,$$

onde o termo $e_{x|y}(k)$, expresso por

$$e_{x|y}(k) = z_{x|y}(k) - C_\sigma \hat{\sigma}_{x|y}(k)_{priori}\,,$$

significa o erro entre as saídas medidas e estimadas *a priori* pelo modelo.

Para extrair os estados estimados $\hat{\varphi}_{x|y}(k)$ requeridos pela lei de controle em (3) a partir dos estados estimados $\hat{\sigma}_{x|y}(k)$ basta aplicar a relação em (2).

O ganho L ótimo (ganho de *Kalman*) é encontrado pela minimização do funcional de custo

$$J_{Kalman} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sigma_{x|y} - \hat{\sigma}_{x|y}\right)^2.$$

Supondo que as medições possuem ruído $v_{(k)}$, que os estados do modelo possuem incerteza $w_{(k)}$ e que ambos $v_{(k)}$ e $w_{(k)}$ possuem distribuição gaussiana, com média zero e matrizes de covariância V e W, respectivamente, calcula-se o ganho ótimo L que minimiza J_{Kalman} pela expressão

$$L = \mathcal{A}_\sigma P C'_\sigma (C_\sigma P C'_\sigma + V)^{-1}$$

onde P, neste caso, é a solução para a seguinte *Equação de Riccati*

$$P = \mathcal{A}_\sigma (P - PC'_\sigma (C_\sigma P C'_\sigma - V)^{-1} C_\sigma P) \mathcal{A}'_\sigma + W,$$

a qual novamente foi resolvida pela função "dare" do software *MATLAB*.

As matrizes de covariância W e V foram definidas conforme $W = diag(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)$ e $V = v_1$, onde aumentando os valores em V e diminuindo em W confia-se mais na predição do modelo, já diminuindo V e aumentando W confia-se mais nas medições.

5 Processamento de Imagens

Para a medição da posição da bola sobre a placa foi desenvolvido um método de servo-visão *position-based*, que consiste na determinação das coordenadas reais x_B e y_B pelos *pixels* das imagens. O algoritmo foi programado no software *MATLAB* que oferece suporte para comunicação com a câmera e funções para tratamento das imagens.

A detecção na imagem da posição bola e dos cantos é a primeira etapa do processamento. Para isto, as imagens no espaço de cores original são convertidas para o formato binário (preto e branco), utilizando a função "im2bw" do *MATLAB*. Então é determinado o centroide e a área de cada objeto pela função "regionprops". A área tem a função de diferenciar a bola dos cantos.

A segunda etapa consiste em aplicar relações geométricas para determinar a posição física da esfera sobre a plataforma de acordo com a localização observada na imagem dos cantos da placa.

6 Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados experimentais para os seguintes cenários:

- **(a)** Ondas quadradas de referência para as coordenadas x_B e y_B com período de 150 amostras, amplitude $70\,mm$ e defasagem de 90° entre as coordenadas para gerar uma trajetória em formato quadrado.

- **(b)** Ondas senoidais de referência para as coordenadas x_B e y_B com período de 70 amostras, amplitude $100\,mm$ e defasagem de 90° entre as coordenadas para gerar uma trajetória em formato circular.

Os parâmetros do protótipo e as configurações para síntese do controle *LQG* estão apresentados na Tabela 1. Para tais valores foram obtidos os ganhos $K = \begin{bmatrix}-1{,}92 & -0{,}85\end{bmatrix}$ para a realimentação de estados e $L = \begin{bmatrix}0{,}94 & 9{,}11 & -3{,}34 & 32{,}83 & 0{,}38\end{bmatrix}'$ para o observador de estados.

O controle foi implementado em tempo discreto em um *PC*, pelo software *MATLAB*, com período de amostragem T_s de $0{,}0338\,s$, onde $0{,}0334\,s$ corresponde ao período de aquisição da câmera e $0{,}0004\,s$ ao tempo de processamento. O atraso de

Tabela 1: Parâmetros do sistema.

Símbolo	Valor	Símbolo	Valor
m_B	$0{,}02\,kg$	q_1	4,6
r_B	$0{,}0125\,m$	q_2	0,48
ω_n	$15\,rad/s$	r_1	1
ξ	1	w_1	1
f_c	$0{,}02\,Ns/m$	w_2	1
g	$9{,}81\,m/s^2$	w_3	2000
d_1	$0{,}03\,m$	w_4	2000
d_2	$0{,}14\,m$	w_5	2
d_3	$0{,}05\,m$	v_1	10

transporte devido a este tempo de processamento é desprezível em relação à dinâmica do sistema.

Os gráficos subsequentes (Figuras 4, 5, 6 e 7) apresentam em linha contínua a resposta real da movimentação da esfera e em linha tracejada a trajetória de referência.

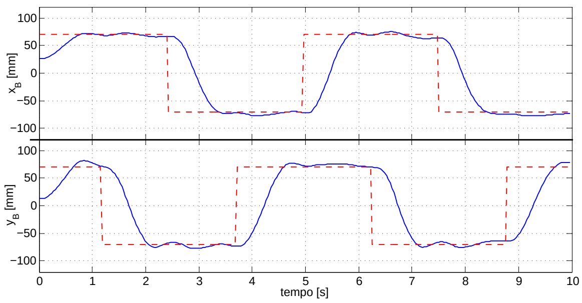

Figura 4: Resposta temporal no cenário (a).

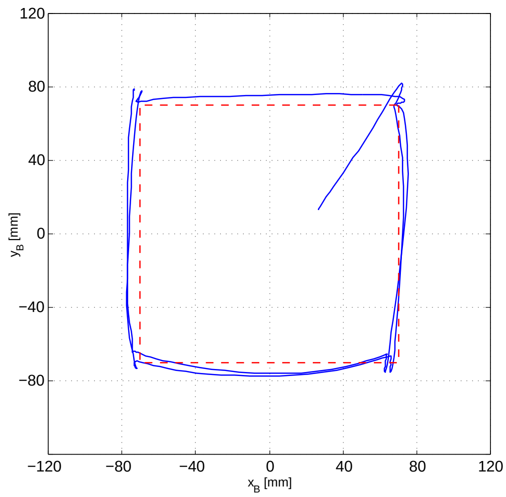

Figura 5: Trajetória nos cenário (a).

Pela análise do resultado no cenário (a), nas Figuras 4 e 5, pode-se avaliar a resposta ao degrau do sistema, com tempo de acomodação em torno de $1\,s$, além de mínimo sobre-sinal e erro de regime.

No cenário (b) foram aplicadas referências senoidais com período de $2\,s$. Verificou-se nas Figuras 6 e 7 pequenos erros de fase e amplitude, dado que nenhuma metodologia de seguimento de

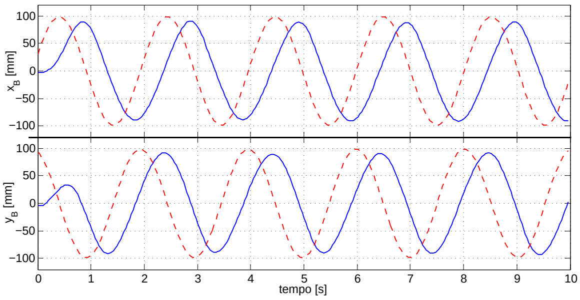

Figura 6: Resposta temporal no cenário (b).

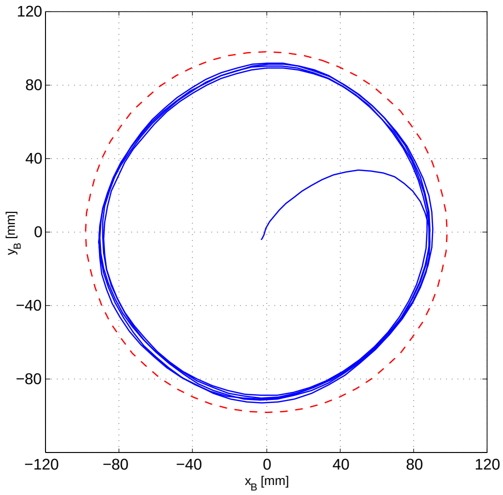

Figura 7: Trajetória no cenário (b).

referências senoidais (pelo Princípio do Modelo Interno) foi incorporada ao controle.

7 Conclusões

Neste projeto foi desenvolvido um protótipo e metodologias de controle para um sistema *Ball and Plate*, atingindo os objetivos de posicionamento da esfera e seguimento de trajetórias na placa. O método desenvolvido de servo-visão *position-based* combinado com o Filtro de *Kalman* permitiu estimações suaves e precisas, um importante fator para o correto controle da posição da esfera.

A perspectiva de trabalhos futuros é a aplicação das técnicas de controle ressonante e repetitivo para correção dos erros de amplitude e fase em referências periódicas senoidais.

Referências

Andrews, G., Colasuonno, C. and Herrmann, A. (2004). Ball on plate balancing system, *Technical report*, Rensselaer Polytechnic Institute.

Awatar, S., Bernard, C., Boklund, N., Master, A., Ueda, D. and Craig, K. (2002). Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system, *Mechatronics* **12**: 217–228.

Braescu, F. C., Ferariu, L., Gilca, R., and Bordianu, V. (2012). Ball on plate balancing system for multi-discipline educational purposes, *Proceedings of the 16th International Conference on System Theory Control and Computing, Sinaia, Romania, 2012*, pp. 1–6.

DeCarlo, R. (1995). *Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation*, Prentice Hall, NJ. 495 pages.

Deriglazov, A. (2010). *Classical Mechanics - Hamiltonian and Lagrangian Formalism*, Springer. 400 pages.

Dorato, P., Abdallah, C. C. T. and Cerone, V. (1995). *Linear Quadratic Control: An Introduction*, Krieger Publishing Company, FL. 215 pages.

Duan, H., Tian, Y. and Wang, G. (2009). Trajectory tracking control of ball and plate system based on auto-disturbance rejection controller, *Proceedings of the 7th Asian Control Conference, Hong Kong, China, 2009*, pp. 471–476.

Ker, C. C., Lin, C. E. and Wang, R. T. (2007). Tracking and balance control of ball and plate system, *Journal of the Chinese Institute of Engineers* **30**(3): 459–470.

Lee, K.-K., Bätz, G. and Wollherr, D. (2008). Basketball robot: Ball-on-plate with pure haptic information, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Pasadena, USA, 2008*, pp. 2410–2415.

Moarref, M., Saadat, M. and Vossoughi, G. (2008). Mechatronic design and position control of a novel ball and plate system, *Proceedings of the 16th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress Centre, Ajaccio, France, 2008*, pp. 1071–1076.

Park, J. H. and Lee, Y. J. (2003). Robust visual servoing for motion control of the ball on a plate, *Mechatronics* **13**: 723–738.

Waldwogel, R. (2010). *Mpc control of a ball and plate system - theory and implementation*, Master's thesis, Institute fur Automatik.

Wang, H., Tian, Y., Sui, Z., Zhang, X. and Ding, C. (2007). Tracking control of ball and plate system with a double feedback loop structure, *Proceedings of the International Conference on Mechatronics and Automation, Harbin, China, 2007*, pp. 1114–1119.

Zia, A. (2011). Polar and polygon path traversal of a ball and plate system, *Proceedings of the International Conference on Electrical and Control Engineering, Yichang, China, 2011*, pp. 4005–4009.