

# CONTROLE ROBUSTO DE VEÍCULO SOBRE PLATAFORMA COM RODAS E TRAÇÃO DIFERENCIAL UTILIZANDO LMIS

NILSON MOUTINHO DOS SANTOS<sup>1</sup>, FLAVIO LUIZ ROSSINI<sup>2</sup>, MARCIO ROBERTO COVACIC<sup>3</sup> E RUBERLEI GAINO<sup>3</sup>.

1. *Engenharia Elétrica, Uningá – Faculdade Ingá,  
Rodovia PR 317, Km 3,5, 87035-570 Maringá, Paraná*  
E-mail: [nilson\\_moutinho@hotmail.com](mailto:nilson_moutinho@hotmail.com)

2. *Centro de Ciências Exatas, Tecnológicas e Agrárias, Cesumar – Centro Universitário de Maringá,  
Av. Guedner, 1610, Jardim Aclimação, 87050-390 Maringá, Paraná*  
E-mail: [frossini@hotmail.com](mailto:frossini@hotmail.com)

3. *Laboratório de Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Londrina  
Centro de Tecnologia e Urbanismo, Rodovia Celso Garcia Cid (PR 445), Km 380, 86057-970, Londrina, Paraná*  
E-mails: [marciocovacic@uel.br](mailto:marciocovacic@uel.br), [rgaino@uel.br](mailto:rgaino@uel.br)

**Abstract** – The article shows that it is possible to examine the variation of the position of the patient's body on a wheelchair (a wheeled mobile platform with differential drive) by using a wheelchair nonlinear dynamic model that includes lateral and longitudinal deviations of the system's center of mass. This is not achieved starting with a linear model. From a nonlinear model a linearized model is obtained through Lyapunov's linearization method. The characteristics and input matrices representing the polytopic vertices are generated by varying three structural parameters values of the wheeled chair. A model with parametric uncertainties is obtained. Then a robust controller is designed through the determination of the output feedback constant matrix  $K_o$  so that the controlled system is stable. To obtain the appropriate matrix  $K_o$ , *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) are used and simulations are performed using Matlab and the results are commented.

**Keywords** – wheelchair, nonlinear dynamic model, polytopic uncertainties, robust controller, LMIs.

**Resumo** – O artigo mostra que é possível estudar a variação do posicionamento do corpo do paciente sobre uma cadeira de rodas a partir de um modelo dinâmico não linear que inclua desvios lateral e longitudinal do centro de massa. Isso não pode ser realizado partindo de um modelo linear. Esses desvios são tratados como incertezas paramétricas, gerando os vértices do politopo. Primeiro é obtido um modelo linearizado por Lyapunov. Variando os valores de três dos parâmetros estruturais são geradas as matrizes característica e de entrada representativas dos vértices dos politopos do modelo com incertezas paramétricas. A seguir, através do uso de Desigualdades Matriciais Lineares, LMIs, é projetado um controlador robusto,  $K_o$ , com realimentação da saída para que o sistema controlado seja estável. Finalizando, são realizadas simulações utilizando o Matlab e comentado os resultados.

**Palavras-chave** – cadeira de rodas, modelo dinâmico não linear, incertezas politópicas, controlador robusto, LMIs.

## 1 Introdução

Mazo (1995) propôs um modelo matemático linear simplificado de uma cadeira de rodas direcionada por acionamento diferencial nas duas rodas traseiras, figura 1, utilizado também por Gaino et. Al. (2003) e Saadatzi (2010). O modelo linear, figura 2, não incluía detalhes estruturais para tratamento de desvios laterais e longitudinais da variação do centro de massa (CG) do posicionamento do paciente.

Zhang (1998) desenvolveu um modelo não-linear dinâmico para um robô móvel sobre rodas que podia representar uma cadeira de rodas com muito maior precisão do que o modelo linear simplificado. Porém, a dinâmica não linear da cadeira, a natureza multivariável do sistema e as possíveis perturbações externas dificultam a busca de estratégias de controles eficazes e de baixo custo computacional, afirma Silveira Júnior (2003). O modelo de Zhang (1998) simplificado linearizado para um robô móvel sobre rodas acionado diferencialmente foi definido pelas considerações simplificativas da Subseção 2.2.

Martins (2008) propôs um modelo matemático parecido com o de Zhang (1998), mas que fornecia as equações de estado do modelo em função dos torques dos motores acionadores das rodas traseiras.



Figura 1. Protótipo da cadeira de rodas da UEL/CTU, Depto. Engenharia Elétrica. [Ferreira, Cervantes e Germanovix (2008)].

Finalmente, De La Cruz, Bastos, e Carelli, (2011) propuseram um modelo mais próximo do protótipo da cadeira da figura 1, utilizado pelo grupo de pesquisa de Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica da Universidade Estadual de Londrina (UEL). As equações de estado eram dadas em função das velocidades linear e angular de referência dos motores acionadores. Foram introduzidos parâmetros que permitiam analisar os efeitos do deslocamento do cadeirante, para a esquerda ou direita em relação ao CG da plataforma, como mostra a figura 3. O número de rodas livres na parte dianteira foi duplicado.

O objetivo deste trabalho é, a partir desse último modelo, preparar as matrizes dos vértices dos politopos, tendo em vista um vetor de incertezas politópicas contendo os parâmetros estruturais do modelo a serem variados,  $'d', 'b_1 e b_2'$  na figura 3, para estudar os efeitos das variações da posição do corpo do paciente na estabilidade da cadeira de rodas.

Utilizando as matrizes dos vértices do politopo buscou-se uma lei de controle com realimentação da saída, representada pela matriz  $K_O$ , via LMIs, tal que levasse o sistema à estabilidade.

## 2 Modelo Dinâmico da Cadeira de Rodas

### 2.1 Modelo Linear

A fim de se obter um controle acurado é necessário um modelo mecânico da cadeira.

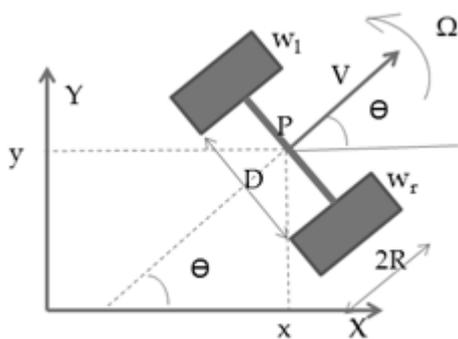


Figura 2. Modelo linear da cadeira de rodas. [Mazo (1995)].

A cadeira de rodas pode ser vista como uma plataforma retangular com duas rodas livres (do tipo castor) e duas rodas motorizadas cada uma acionada por um motor de corrente contínua. O modelo linear simplificado da figura 2 fornece resultados satisfatórios para o cálculo da velocidade linear,  $u$ , e angular,  $w$ , em função das cinemáticas direta e inversa, deduzidas em Mazo (1995). As equações do modelo são:

$$u = \frac{R}{2}(w_r + w_l) \quad (1)$$

$$w = \frac{R}{D}(w_r - w_l) \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} w_r \\ w_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{D}{2R} \\ \frac{1}{R} & -\frac{D}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{D} \\ \frac{R}{R} & -\frac{R}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r \\ w_l \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 2.2 Modelo Não-linear

Segundo Espinosa et al. (2001) o projeto de um controlador é fortemente influenciado pela qualidade do modelo do sistema físico que está sendo modelado. Obter o modelo dinâmico do veículo em malha aberta pode ser extremamente complexo no que diz respeito à estrutura da plataforma e ao número e detalhes de efeitos a serem modelados.

Zhang (1998) propôs um Modelo Dinâmico não-linear, representado por uma equação de estados, tendo em vista os seguintes pressupostos:

- (i) limitação do movimento do robô a três graus de liberdade, num plano bidimensional, caracterizado pelas variáveis independentes  $u, v, w, w_l$  e  $w_r$  vistas na figura 3;
- (ii) atuação da somatória das forças e momentos aplicados tomada em relação ao sistema de referência local  $x' - G - y'$ ;
- (iii) consideração do ponto de contato roda-solo como ideal, ou seja, não há deslizamento;
- (iv) desconSIDERAÇÃO dos distúrbios e momentos externos atuantes;
- (v) desconSIDERAÇÃO das forças viscosas de fricção e de resistência das rodas do tipo castor.

Todos esses efeitos perturbadores não modelados foram considerados em um vetor de incertezas paramétricas do modelo e os efeitos dos parâmetros físicos do robô móvel foram considerados em um vetor de parâmetros identificados Zhang (1998).

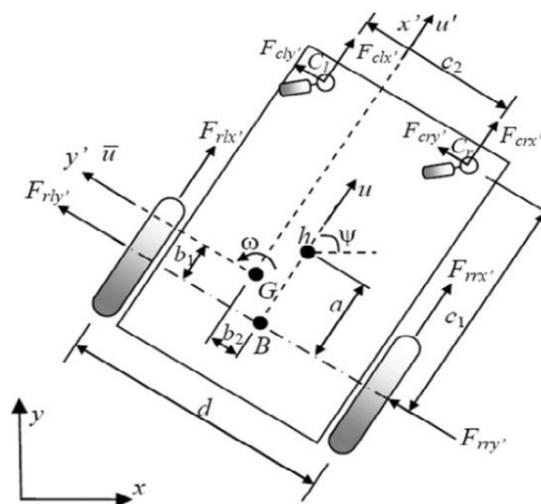


Figura 3. Representação gráfica de um robô móvel sobre rodas acionado diferencialmente e seus parâmetros. Modelo não-linear. [De La Cruz, Bastos e Carelli (2011)].

Zhang (1998) utiliza como entrada do controlador dinâmico do robô os torques dos motores acionadores. De acordo com Martins (2008) embora os sinais gerados pela maioria dos controladores dinâmicos reportados na literatura sejam torques ou vol-

tagens para os motores do robô, os robôs comerciais, por outro lado, usualmente recebem comandos de velocidade. Assim, o Modelo Dinâmico de Martins (2008), tem como entradas os valores da velocidade linear e angular,  $[u_{ref} \ w_{ref}]^T$ .

De La Cruz e Carelli (2006) propõem um modelo dinâmico não-linear com uma roda castor na frente. Um vetor de incertezas paramétricas é associado ao modelo, considerando as incertezas das velocidades de deslizamento e da orientação do robô em função de parâmetros físicos tais como massa, inércia, diâmetros das rodas e pneus, parâmetros dos motores e seus servos, forças nas rodas, etc., os quais são considerados distúrbios. Um vetor de parâmetros identificados é dado no artigo em função dos parâmetros físicos do robô.

De La Cruz, Bastos e Carelli (2011) propõem o modelo não-linear da figura 3, sendo uma escolha mais adequada para o nosso objetivo de estudo do controle, dando o posicionamento do corpo do paciente paraplégico na cadeira e gerando os vértices de interesse. Esse modelo permite deslocamento à esquerda ou direita em relação ao centro de gravidade da plataforma (parâmetros  $b_1$  e  $b_2$ ) e conta com duas rodas livres na parte dianteira da plataforma como na figura 1.

Desprezando os deslizamento das rodas e as forças que agem nas rodas dianteiras (castores), os distúrbios  $\delta_u$  e  $\delta_w$ , se tornam nulos. Manipulando a parametrização linear do modelo expressa em (5), obtém-se o modelo dinâmico de De La Cruz, Bastos, e Carelli (2011), equação (15).

$$\begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -w^2 & u & 0 & 0 & -\dot{w} & 0 \\ 0 & \dot{w} & 0 & 0 & uw & w & 0 & -\dot{u} \end{bmatrix} \theta^0 = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ w_{ref} \end{bmatrix} \quad (5)$$

O vetor de grandezas paramétricas do modelo é dado em (6) e o cálculo dos  $\theta_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 8$  é realizado através das equações (7) a (14).

$$\theta^0 = [\theta_1^0 \ \theta_2^0 \ \theta_3^0 \ \theta_4^0 \ \theta_5^0 \ \theta_6^0 \ \theta_7^0 \ \theta_8^0]^T \quad (6)$$

As equações (7) a (14) se referem à figura 3. Para  $i = 1, 2, 4$  e  $6$  tem-se  $\theta_i > 0$  para qualquer valor de  $b_1$  e  $b_2$ . Quando o ponto CG estiver sobre a mediatriz que passa pelo ponto B tem-se  $\theta_i = 0$  para  $i = 7$  e  $8$ . Para  $i = 3$  e  $5$ ,  $\theta_i = 0$  se CG estiver sobre a linha que une os eixos das rodas traseiras. Para  $i = 3, 5, 7$  e  $8$ , temos  $\theta_i = 0$  se o CG estiver exatamente sobre o ponto B, isto é,  $b_1 = b_2 = 0$ .

$$\theta_1^0 = \frac{k_{DT}}{k_{PT}} + \frac{R_a r}{2k_{PT}k_a} \left( \frac{2I_e}{r^2} + m \right) \quad (7)$$

$$\theta_2^0 = \frac{R_a r}{dk_{PR}k_a} \left( \frac{I_e d^2}{2r^2} + I_z + mb_1^2 + mb_2^2 \right) + \frac{k_{DR}}{k_{PR}} \quad (8)$$

$$\theta_3^0 = \frac{R_a r m b_1}{2k_{PT}k_a} \quad (9)$$

$$\theta_4^0 = 1 + \frac{k_b}{k_{PT}r} + \frac{B_e R_a}{k_{PT}k_a r} \quad (10)$$

$$\theta_5^0 = \frac{R_a r m b_1}{dk_{PR}k_a} \quad (11)$$

$$\theta_6^0 = 1 + \frac{dk_b}{2k_{PR}} + \frac{dB_e R_a}{2k_{PR}k_a r} \quad (12)$$

$$\theta_7^0 = \frac{R_a r m b_2}{2k_{PT}k_a} \quad (13)$$

$$\theta_8^0 = \frac{R_a r m b_2}{dk_{PR}k_a} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \begin{bmatrix} \theta_2^0 & \theta_7^0 \\ \theta_8^0 & \theta_1^0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_{ref} \\ w_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u \theta_4^0 - w^2 \theta_3^0 \\ uw \theta_5^0 + w \theta_6^0 \end{bmatrix} \right\} \quad (15)$$

Tomando-se a derivada de (4) e substituindo em (15), chegamos à equação (16) que representa o modelo dinâmico simplificado da cadeira de rodas.

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_r \\ \dot{w}_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2^0 & \theta_7^0 \\ \theta_8^0 & \theta_1^0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_{ref} \\ w_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(w_r + w_l)\theta_4^0 - \frac{r^2}{d^2}(w_r - w_l)^2\theta_3^0 \\ \frac{r^2}{2d}(w_r^2 - w_l^2)\theta_5^0 + \frac{r}{d}(w_r - w_l)\theta_6^0 \end{bmatrix} \right\} \quad (16)$$

Nessa equação  $[u_{ref} \ w_{ref}]^T$  é o vetor de entrada, constituído das velocidades linear e angular de referência dos controladores da velocidade das rodas traseiras, e  $[w_r \ w_l]^T$  é o vetor de estados do modelo dinâmico que não aparece explicitado em (16).

### 3 Projeto Controlador Robusto através de LMIs

Segundo Boyd et al. (1994), muitos problemas que surgem na teoria dos sistemas e controle podem ser reduzidos a um problema de otimização convexa ou quase convexa envolvendo Desigualdades matriciais Lineares, (*Linear Matrix Inequalities*, LMIs). Esse fato, aliado ao surgimento de excelentes ferramentas computacionais numéricas de resolução de LMIs, incentivou o uso das mesmas no estudo de estabilidade de sistemas. Esse desenvolvimento tem sua origem a partir da publicação da teoria de Lyapunov, em 1890. Ele mostrou que sua primeira LMI podia ser resolvida analiticamente para estudar a estabilidade de pequenos sistemas dinâmicos de segunda ou terceira ordem.

Seja uma planta linear, invariante no tempo, controlável e observável (Aguirre, 2010):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y \in \mathbb{R}^m$  é a matriz de saída do sistema,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz característica do sistema,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada do sistema e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é matriz de saída do sistema.

Uma planta dinâmica apresenta incertezas originárias de várias fontes: desconhecimento de parâmetros (constantes, variantes no tempo, ou conhecidos com imprecisão) e desconhecimento de entradas do sistema (Covacic, 2001). Além disso, há duas classes conhecidas de sistemas: os passivos, independentes

de utilização de energia externa para o seu controle, e os ativos, que dependem, por exemplo, de atuadores para serem controlados (Torres, 2010).

Sistemas Estritamente Reais Positivos (ERP) são sistemas passivos, realimentados negativamente, com o mesmo número de entradas e saídas e que apresentam a propriedade de estabilidade assintótica. A condição necessária e suficiente para que isso aconteça é que todos os zeros de transmissão tenham parte real negativa (Covacic, 2010).

Tornar um sistema ERP é conhecido como síntese ERP. Trata-se de encontrar duas matrizes constantes  $K_o$ , de realimentação da saída, e  $F$ , em série com a saída, tais que o sistema controlado ( $A - BK_oC, B, FC$ ) seja ERP (Covacic, 2006).

Nesse artigo, o foco está no fato de que os sistemas ERP são estáveis por definição. Assim, na seção 3.2, será utilizada a formulação em LMIs do Teorema 8, da tese de Covacic (2006), apenas com a finalidade de determinar a matriz  $K_o$  que torna o sistema, com realimentação da saída, estável.

### 3.1 Linearizando o modelo dinâmico por Lyapunov

Inicialmente são identificadas as matrizes característica (18), de entrada (19), de saída e de transmissão direta do sistema (20), para estabelecer as equações de estado do modelo dinâmico. As matrizes em questão são  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Supõe-se que as variáveis de estados estejam disponíveis para medição, isto é,  $C = I$ .

O modelo dinâmico obtido em (16) apresenta não-linearidades em  $w_r$  e  $w_l$ , mas pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais não lineares na forma da equação (21) (Slotine, 1991).

A estabilidade do projeto de controle de um sistema não-linear pode ser garantida, em torno de um ponto de equilíbrio na origem, substituindo-se a matriz não-linear original pela matriz Jacobiana da função (Slotine 1991). No caso, (22) será a matriz A Jacobiana de  $f(x, u)$  em relação às velocidades angulares das rodas traseiras e (23) a matriz B, em relação às velocidades linear e angular de referência.

Em (24) temos o sistema linearizado, onde cada elemento da matriz é definido de (25) à (32).

$$A = \frac{-1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2^0 & \theta_7^0 \\ \theta_8^0 & \theta_1^0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \frac{r}{2}(w_r + w_l)\theta_4^0 - \frac{r^2}{d^2}(w_r - w_l)^2\theta_3^0 \\ \frac{r^2}{2d}(w_r^2 - w_l^2)\theta_5^0 + \frac{r}{d}(w_r - w_l)\theta_6^0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$B = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{d}{2r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{d}{2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2^0 & \theta_7^0 \\ \theta_8^0 & \theta_1^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ w_{ref} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\dot{x} = f(x, u) = f(w_r, w_l, u_{ref}, w_{ref}) \quad (21)$$

$$A = \left[ \frac{\partial f}{\partial w_r}, \frac{\partial f}{\partial w_l} \right]_{(w_r=0, w_l=0)} \quad (22)$$

$$B = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_{ref}}, \frac{\partial f}{\partial w_{ref}} \right]_{(u_{ref}=0, w_{ref}=0)} \quad (23)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} e B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$A_{11} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_2^0}{r} + \frac{d\theta_8^0}{2r} \right) \left( \frac{r}{2}\theta_4^0 - \frac{2r^2}{d^2}(w_r - w_l)\theta_3^0 \right) + \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_7^0}{r} + \frac{d\theta_1^0}{2r} \right) \left( \frac{r^2}{d}w_r\theta_5^0 + \frac{r}{d}\theta_6^0 \right) \quad (25)$$

$$A_{12} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_2^0}{r} + \frac{d\theta_8^0}{2r} \right) \left( \frac{r}{2}\theta_4^0 + \frac{2r^2}{d^2}(w_r - w_l)\theta_3^0 \right) - \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_7^0}{r} + \frac{d\theta_1^0}{2r} \right) \left( \frac{r^2}{d}w_l\theta_5^0 + \frac{r}{d}\theta_6^0 \right) \quad (26)$$

$$A_{21} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_2^0}{r} - \frac{d\theta_8^0}{2r} \right) \left( \frac{r}{2}\theta_4^0 - \frac{2r^2}{d^2}(w_r - w_l)\theta_3^0 \right) + \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_7^0}{r} - \frac{d\theta_1^0}{2r} \right) \left( \frac{r^2}{d}w_r\theta_5^0 + \frac{r}{d}\theta_6^0 \right) \quad (27)$$

$$A_{22} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_2^0}{r} - \frac{d\theta_8^0}{2r} \right) \left( \frac{r}{2}\theta_4^0 + \frac{2r^2}{d^2}(w_r - w_l)\theta_3^0 \right) - \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_7^0}{r} - \frac{d\theta_1^0}{2r} \right) \left( \frac{r^2}{d}w_l\theta_5^0 + \frac{r}{d}\theta_6^0 \right) \quad (28)$$

$$B_{11} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_2^0}{r} + \frac{d\theta_8^0}{2r} \right) \quad (29)$$

$$B_{12} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_7^0}{r} + \frac{d\theta_1^0}{2r} \right) \quad (30)$$

$$B_{21} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_2^0}{r} - \frac{d\theta_8^0}{2r} \right) \quad (31)$$

$$B_{22} = \frac{1}{\theta_1^0 \theta_2^0 - \theta_7^0 \theta_8^0} \left( \frac{\theta_7^0}{r} - \frac{d\theta_1^0}{2r} \right) \quad (32)$$

O modelo linearizado obtido é uma aproximação da cadeira de rodas real e como tal apresenta diversos tipos de incertezas, envolvendo dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, ruídos, linearização, etc.. (Zhang 1998). A análise e o projeto do controlador do sistema devem considerar essas incertezas (Trofino, 2000). O sistema deve ser robusto em relação às incertezas paramétricas do modelo. Elas estão presentes nos raios, 'r', na distância entre os eixos, 'd', das rodas traseiras, e nas distâncias dos deslocamentos lateral e longitudinal, 'b<sub>1</sub> e b<sub>2</sub>' respectivamente, relativos ao CG do sistema, figura 3.

### 3.2 Projetando um controlador robusto K<sub>o</sub>

O Lema 1 de Covacic (2006) estabelece que a matriz de transferência do sistema,  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , é ERP se e somente se existir uma matriz  $P = P'$ , tal que (33) seja satisfeita.

$$\begin{aligned} PA + A'P &< 0, \\ B'P &= C, \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Pelo Lema 1 Covacic (2006) propõe o seu Problema 2: "Dada a planta  $\{A, B, C\}$  linear, invariante no tempo, controlável e observável, com  $\text{posto}(C)=p$ , e  $\text{posto}(B)=\text{posto}(CB)=m$ , obtenha as condições necessárias e/ou suficientes, usando LMIs, para a

existência de matrizes constantes  $F$  e  $K_o \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , para que o sistema da figura 4 seja ERP.”

Finalmente, ao tratar dos Sistemas com Realimentação da Saída que possuem números diferentes de entradas ( $m$ ) e saídas ( $p$ ), Covacic (2006) propõe o Teorema 8: “O Problema 2, com  $p=n$ , tem solução se e somente se existirem matrizes  $X = X'$  e  $R$  tal que satisfaçam às LMIs da equação (34)”.

$$\begin{aligned} AX + XA' - BR - R'B' &< 0, \\ X &> 0 \end{aligned} \quad (34)$$

E, as matrizes  $F$  e  $K_o$  serão obtidas por (35) e (36).

$$F = B'X^{-1}C^{-1} \quad (35)$$

$$K_o = RX^{-1}C^{-1} \quad (36)$$

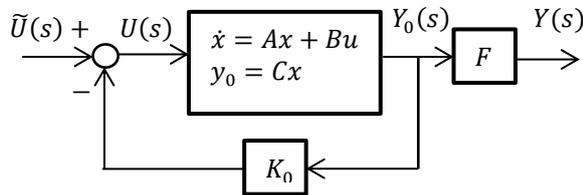


Figura 4. Sistema realimentado do Problema 2. [Covacic (2006)].

Segundo Covacic (2006) o Teorema 8 pode ser aplicado quando o número de saídas é igual ao número de estados, é o caso do veículo sobre plataforma com rodas e tração diferencial modelado. Neste artigo utilizamos o Teorema 8 de Covacic (2006) para encontrar uma lei de controle  $K_o$ , que realimentando a saída, faz com que o sistema seja estável.

## 4 Exemplos e Resultados

### 4.1 Obtenção dos Vértices dos Polítopos

Utilizando-se o vetor de grandezas paramétricas (6), o vetor de incertezas paramétricas (37), os intervalos de variação dos parâmetros escolhidos em (38) a (40) e as equações (25) a (32) foram calculados os valores numéricos dos elementos das matrizes  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $B_{ij} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

$$Pd_i(d_i, b_{1i}, b_{2i}) \text{ para } i = 1, 2, \dots, 7, 8 \quad (37)$$

$$0.40 \leq d \leq 0.70 \quad (38)$$

$$0 \leq b_1 \leq 0.151 \quad (39)$$

$$-0.151 \leq b_2 \leq 0.151 \quad (40)$$

No programa Matlab® são declarados os valores numéricos e as matrizes, seguidas das LMIs, (34).

### 4.2 Resultados da Simulação

Os resultados da simulação estão em (41) à (43).

$$X = \begin{bmatrix} 48.1548 & 1.0129 \\ 1.0129 & 48.1651 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$R = \begin{bmatrix} 319.9062 & 312.3554 \\ 625.2620 & 646.4746 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$K_o = \begin{bmatrix} 6.5098 & 6.3488 \\ 13.2726 & -13.7025 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Vemos que  $X$  é simétrica e que as LMIs são factíveis, ou seja, encontrou-se uma resposta para  $K_o$ .

Para todos os vértices dos polítopos (25) a (32) e para um ponto qualquer,  $'d_i'$ ,  $'b_{1i}'$  e  $'b_{2i}'$  do interior do polítopo, o sistema se mostrou estável. Seja, por exemplo,  $Pd_{cg}(0.35, 0, 0)$  um ponto do interior do polítopo, onde o paciente se posiciona sobre o centro de massa. Suas matrizes representativas seriam:

$$Ad_{cg} = \begin{bmatrix} 0.0809 & 0.0310 \\ 0.0310 & 0.0809 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$Bd_{cg} = \begin{bmatrix} 0.0476 & 0.0125 \\ 0.0476 & -0.0125 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$Cd = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Utilizando a matriz de realimentação (43) verifica-se que os autovalores da matriz característica do sistema em malha fechada,  $(Ad_{cg} - Bd_{cg}K_oCd)$ , são  $'-0.5000'$  e  $'-0.2875'$ . Portanto, o sistema é estável.

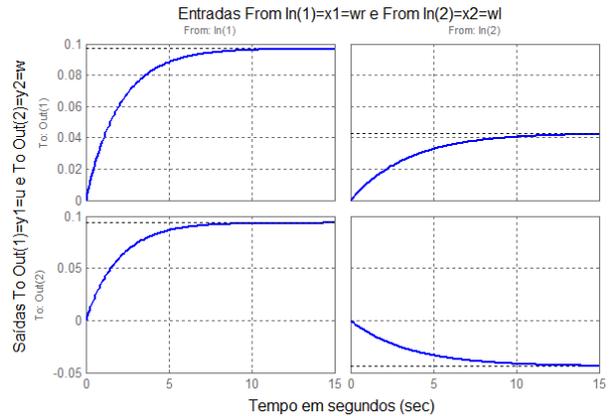


Figura 5. Representação gráfica das respostas  $u$  e  $w$  quando é aplicado um degrau unitário nas entradas  $w_r$  e  $w_l$  [Do Autor].

Na figura 5 temos as respostas transitórias das velocidades linear e angular da cadeira,  $u$  e  $w$ , em função do tempo, quando um degrau unitário é aplicado na velocidade angular do motor direito  $w_r$  (gráficos da esquerda) e na velocidade angular do motor esquerdo  $w_l$  (gráficos da direita). Pode-se ver que para um degrau unitário aplicado no motor esquerdo, o sistema estabiliza a velocidade angular,  $w$ , em  $-0.05 \text{ rad/s}$  em aproximadamente 15 s.

## 5 Conclusão

A estabilidade do sistema não-linear em presença de incertezas paramétricas pôde ser analisada e o controlador projetado através da abordagem por LMIs, conforme objetivo inicial.

Essa mesma abordagem pode ser utilizada para obtenção do modelo cinemático do veículo sobre plataforma com rodas sendo que a associação dos modelos dinâmico e cinemático resultaria no modelo global da cadeira de rodas. As saídas do modelo dinâmico, dadas em função de  $u$  e  $w$ , seriam alimentadas no modelo cinemático produzindo a saída  $x$ ,  $y$  e  $\psi$ , as variáveis de localização do veículo (De La Cruz, Bastos, e Carelli 2011). O bloco resultante do acoplamento teria como entradas  $u$  e  $w$ , e como saídas  $x$ ,  $y$  e  $\psi$ .

Outros parâmetros poderiam ter sido variados para estudar a estabilidade do sistema. Esse procedimento levaria ao conhecimento dos parâmetros que mais influenciam na estabilidade do modelo.

Não foi utilizada a matriz constante  $F$ , equação (35), que, em série com a saída dinâmica, levaria o sistema à condição de ERP, figura 4. A razão disso é que  $F$  é dependente de uma matriz  $B$  única, como mostra a equação (35), todavia, nessa abordagem, é utilizado um conjunto de 8 matrizes  $B_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ , número de vértices dos politopos.

### Agradecimentos

Agradeço a assistência e orientação recebidas do Dr. Ruberlei Gaino e Dr. Marcio Roberto Covacic. Os autores agradecem o apoio financeiro da CAPES, do CNPq e da Fundação Araucária.

### Referências Bibliográficas

- Aguire, L. A. (2007). Encicl. de Automática: Controle e Automação, v. I. Blucher, São Paulo.
- Boyd, S.; Ghaoui, L. El; Feron, E.; Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 15. Philadelphia (PA); 205 p.
- Covacic, M.R. (2010); Gaino, R.; Teixeira, C.M.; Carvalho, A. A.; Assunção, E.; Cardim, R.. Sistemas ERP com Compensadores Dinâmicos para Controle da Posição Angular da Perna de Pacientes Paraplégicos. In: XVIII Congr. bras. de Automática, Bonito, MS; p. 1700-1707.
- . (2001). Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI. Julho 2001. Dissertação (Mestrado em Eng. Elétrica) - UNESP/FEIS, Ilha Solteira, São Paulo; 116 p.
- . (2006). Síntese de Sistemas ERP Baseada LMIs e Controle com Estrutura Variável. Fevereiro 2006. Tese (Doutorado em Eng. Elétrica) - UNESP/FEIS, Ilha Solteira, São Paulo; 237 p.
- De La Cruz, C. C. e Carelli, R. (2006). Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots. In: Thirty-second annual conference of the IEEE industrial electronics society, IECON, Paris, p. 3880-3885.
- De La Cruz, C. C.; Bastos, T. F.; e Carelli, R. (2011). Adaptive motion control law of a robotic wheelchair. Control Engineering Practice, Vol. 19, Elsevier Science Ltd., p. 113-125.
- Espinosa, F.; López, E.; Mateos, R.; Mazo, M. e García, R. (2001). Advanced and Intelligent Control Techniques Applied to the Drive Control and Path Tracking Systems on a Robotic Wheelchair. Autonomous Robots 11, 137-148.
- Ferreira, C. L. L.; Cervantes, S. G. de S.; Germanovix, W. (2008). Cadeira de Rodas Controlada por Sopro e Sucção. Disponível em: [http://www.labplan.ufsc.br/congressos/CBA2008/textos/CBA\\_2008\\_Artigos/40057.pdf](http://www.labplan.ufsc.br/congressos/CBA2008/textos/CBA_2008_Artigos/40057.pdf). Acesso em: 20/04/2011.
- Gaino, R.; Suzuki, I.; Fonseca Sobrinho, A.S.; Germanovix, Walter. (2003). Implementação e Análise do Controle de Uma Cadeira de Rodas Através de Sopros e Sucções. In: SBAI, Bauru, 6º Simp. bras. de Automação Inteligente. Tec Art Editora, 2003. P. 775-780.
- Martins, F. N.; Celeste, W. C.; Carelli, R.; Sarcinelli, M., & Bastos, T. F. (2008). An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. Control Engineering Practice, 16(11), 1354-1363.
- Mazo, M.; Rodríguez, F.J.; Lázaro, J.L.; Ureña, J.; García, J.C.; Santiso, E.; Revenga, P.A. (1995). Electronic Control of a Wheelchair Guided by Voice Commands. Control Engineering Practice, v. 3, Elsevier Science Ltd., p. 665-674.
- Saadatzai, M. N.; Poshtan, J. (2010). Multivariable Robust Controller for Linear and Angular Velocities of Electrically-Powered Wheelchair Using Characteristic Loci Method. In: IEEE International Conference on Control Applications, Part of 2010 IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Yokohama (JP), Sept. 8-10, p. 1246-1250.
- Silveira Júnior, A. V. (2003) Controle Cinemático e Dinâmico de Robôs Móveis. Tese (Doutorado em Eng. Eletrônica e Computação na Área de Sistemas de Controle) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos; 118 p.
- Slotine, J. J.; Li, W. (1991). Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, New Jersey.
- Torres, D.R. (2010). Redução de Vibrações de Vibrações Utilizando Múltiplos Sistemas Passivos de Absorção. Setembro 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - URFG/COPPE, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro; 92 p.
- Trofino, A. (2000). Controle Robusto. Notas de Aula, Lab. de Controle e Micro-informática. UFSC. Disponível em <http://www.das.ufsc.br/~trofino/disciplinas/das-6600/apostila-robusto.pdf>. Acesso em: 16/05/2012.
- Zhang, Y.; Hong, D.; Chung, J.H.; Velinsky, A.A. (1998). Dynamic Model Based Robust Tracking Control of a Differentially Steered Wheeled Mobile Robot. Proceeding of the American Control Conference, Philadelphia (PA), June 1998; p. 850- 855.