

ANÁLISE DA SUPERFÍCIE DE CHAVEAMENTO DE UM SISTEMA AFIM POR PARTES

MARIA LUÍZA FIGUEIREDO REIS* GLEISON F. VASCONCELOS AMARAL*, ARISMAR M. GONÇALVES‡

*Praça Frei Orlando, 170
Centro - CEP 36307-352
São João Del Rei, Minas Gerais, Brasil

Emails: malu.cax@gmail.com, gleisonufs@gmail.com, juninho_ufs@gmail.com.br

Abstract— Nonlinear systems can be modeled in several ways, among them piecewise affine models. This article is a brief summary of this type of modeling, and a review of three analysis tools that can be calculated analytically: nullclines, connecting curves and vortex core curves. A case studies was made for a piecewise system that has a chaotic attractor Rossler-like. It was analyzed their respective switching surfaces and found common characteristics on surfaces of strange attractors and common characteristics on switching surfaces on limit cycles but different when they are compared. This is relevant in the context of modeling since it allows performing the modeling of a system aiming a specific chaotic behavior.

Keywords— Piecewise affine models, attractor, cycle limit, nullclines, vortex core curves, connecting curves.

Resumo— Sistemas não lineares podem ser modelados de várias maneiras, entre elas a modelagem afim por partes. Esse artigo faz um breve resumo sobre esse tipo de modelagem, e uma revisão de três ferramentas de análise que podem ser calculadas analiticamente: *nullclines*, curvas conectantes e curvas do núcleo de vórtice. Um estudo de caso foi feito para um sistema afim por partes que possui um atrator caótico do tipo Rossler. Foi analisado suas respectivas superfícies de chaveamento e descobriu-se características comuns para superfícies de atratores estranhos e características comuns em superfícies de chaveamento de ciclos limites mas diferentes quando comparadas entre si. Isso é relevante no âmbito da modelagem pois possibilita realizar a modelagem de um sistema objetivando um comportamento caótico específico.

Palavras-chave— Sistemas afim por partes, atrator, ciclo limite, *nullclines*, curvas conectantes, curvas de núcleo de vórtice.

1 Introdução

A Identificação de Sistemas é uma das atividades mais antigas e relevantes da ciência. É a área do conhecimento que estuda maneiras de modelar e analisar sistemas na tentativa de encontrar algum padrão em observações (Aguirre (2007)). Para identificar um sistema, é necessário propor um modelo que consiga descrever algumas de suas características. Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorram com os elementos desse conjunto. Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo (Monteiro (2006)).

O estudo teórico de um sistema dinâmico pode ser dividido em duas partes, a construção de um modelo adequado e a análise desse modelo. Modelos são um grande auxílio para a compreensão da realidade e na resolução de seus problemas. Servem para reduzir a complexidade da realidade de maneira que se possa extrair características de interesse (Amaral (2006)).

A teoria moderna de sistemas dinâmicos não lineares foi desenvolvida por Jules Henri Poincaré. Em 1890, Poincaré escreveu o trabalho que deu origem ao que hoje é conhecido como teoria dos sistemas dinâmicos (Poincaré (1890)). Os trabalhos de Poincaré deram a base para que se com-

preendesse o que é hoje conhecido como comportamento dinâmico caótico.

Dentre os diferentes tipos de comportamentos dinâmicos, tem-se o caos, que é caracterizado pela sua inerente sensibilidade às condições iniciais e por uma aparente desordem quando é verificada a sua evolução temporal. Isso faz com que o sistema seja imprevisível a longo prazo, a despeito do conhecimento das equações diferenciais ou de diferença que descrevem o seu comportamento. O regime caótico é de fato uma notável comprovação da hipótese determinística da natureza.

Modelos utilizados na modelagem empírica podem ser classificados em dois grandes grupos: modelos globais e modelos afim por partes (MAPs). Os modelos globais explicam toda a faixa de observação da realidade com uma única estrutura. Nos modelos com estruturas por partes, cada parte do modelo se encarrega de explicar uma única parte das observações. Essa segunda abordagem, pela própria filosofia de construção, é capaz de fornecer uma explicação para o comportamento global. Por isso mesmo, essa abordagem apresenta grande proximidade com a forma como as engenharias resolvem problemas. Ou seja, determinam-se pontos de operação e, em torno desses pontos, desenvolvem-se modelos simples, geralmente lineares ou afins.

Nos MAPPs a superfície de chaveamento é o local onde as não linearidades do sistema são existentes para a transição de um sistema linear para

o outro. Sendo assim a análise do que ocorre nesse ponto de transição é de suma importância para a compreensão da dinâmica global do sistema afim por partes.

O conhecimento do campo vetorial possui um papel muito importante na determinação de modelos com estrutura por partes. Além de fornecer informações locais sobre o sistema, também auxilia na determinação da superfície de chaveamento dos MAPPs (Amaral (2006)). Embora os pontos fixos são de fundamental importância na estrutura do retrato de fases dos sistemas, eles não fornecem, informações sobre a forma e o tipo de atratores.

Recentemente, novas ferramentas foram desenvolvidas para o estudo do campo vetorial de sistemas não lineares. Três dessas ferramentas foram escolhidas para o estudo de caso desse artigo. A justificativa dessa escolha é pelo fato de que essas ferramentas podem ser calculadas analiticamente, utilizando apenas as equações do modelo. Essa característica é interessante no âmbito da modelagem pois é possível construir o modelo esperando um comportamento caótico específico de acordo com os cálculos dessas ferramentas.

A variedade da curvatura do campo é uma delas (Ginoux and Rossetto (2006)). Provou-se com esse trabalho que a componente dependente do tempo da variedade da curvatura do campo possui um papel muito importante na formação dos atratores caóticos. Uma outra ferramenta foi a *nullcline* (Thomas (2006)). Cada equação do estado estacionário do sistema a ser estudado define uma *nullcline*. Basicamente, elas dividem o espaço de estado em regiões, e suas interseções definem os pontos fixos do sistema. Em cada região definida pela *nullcline*, o espaço vetorial possui um tipo de comportamento. A análise do espaço dividido pelas *nullclines* auxilia na interpretação global do sistema. Finalmente, pode-se citar as curvas conectantes (Gilmore et al. (2010)). As curvas ligam os pontos fixos nos lugares do campo vetorial onde a componente tangencial da aceleração é nula.

Existem vários sistemas que possuem estrutura topológica semelhante ao atrator de Rossler. Esses sistemas foram estudados por (Sprott and Linz (2000); Letellier et al. (2006)).

O objetivo do artigo é utilizar dessas ferramentas de análise no plano da superfície de chaveamento de um sistema afim por partes do tipo Rossler com o intuito de obter informações sobre o diferentes comportamentos caóticos do sistema estudado, mais especificadamente, atratores estranhos e ciclos limites.

O artigo é organizado da seguinte forma: na seção 2 é feito um breve resumo sobre conceitos essenciais para o entendimento desse artigo. Na seção 3 é feita uma apresentação do sistema afim. Na seção 4 são demonstrados os resultados e suas análises e finalmente, na seção 5 as conclusões sobre o tema.

2 Metodologia

2.1 Sistemas Afim por Partes

Entre as representações de modelos utilizadas na identificação e modelagem de sistemas dinâmicos não lineares, os modelos afins por partes (MAPP) destacam-se por possibilitarem uma interpretação global e local da dinâmica reconstruída em (Amaral (2006)). A representação de modelos afim por partes explícitos é dado por sua forma canônica descrita na equação (1):

$$y = ax + b + \sum_{i=1}^n c_i |a_i x + b_i|. \quad (1)$$

A estrutura de modelos afim por partes é definida por três elementos (Sontag (1981)):

1. Divisão do espaço de estados:

O espaço é dividido em um certo número de politopos \mathbf{P}_i sendo que $\bigcup \mathbf{P}_i = \mathbb{R}^n$ e $\bigcap \mathbf{P}_i = \phi$. Esses politopos são determinados por meio de desigualdades lineares que definem semi-espacos $\mathbf{S}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}_i \mathbf{x} + \mathbf{d} \geq 0\}$. O Politopo \mathbf{P}_i pode ser definido como a interseção de um certo número de semi-espacos $\bigcap \mathbf{S}_i = \mathbf{P}_i$. Os hiperplanos $s_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{c}_i \mathbf{x} + \mathbf{d} \geq 0\}$, que definem a partição dos semi-planos serão referidos como superfície de chaveamento.

2. Modelo afim de cada partição do espaço:

Uma vez determinadas as partições do espaço, é necessário definir os subsistemas que descreverão o comportamento do sistema em cada região. Os subsistemas locais podem ser definidos como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i)$. Sendo $\mathbf{x}, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3. Lei de chaveamento entre politopos:

Para concluir a definição do sistema afim por partes, basta determinar uma função que seleciona o subsistema referente ao politopo \mathbf{P}_i . Sejam as seguintes funções dadas pelas equações (2) e (3):

$$f[d_i(\mathbf{x})] = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ \mathbf{0}, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (2)$$

e

$$\bar{f}[d_i(\mathbf{x})] = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) \geq 0, \\ \mathbf{1}, & \text{se } d_i(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (3)$$

sendo $d_i(\mathbf{x})$ a distância da superfície de chaveamento. Como pode ser verificado, a função $\bar{f}[d_i(\mathbf{x})]$ é a função complementar de $f[d_i(\mathbf{x})]$, ou seja $\bar{f}[d_i(\mathbf{x})] = 1 - f[d_i(\mathbf{x})]$, caso haja somente dois politopos. Em politopos separados pelo(s) mesmo(s) hiperplano(s) a definição de uma lei de chaveamento é facilitada pelo uso da função

complementar $\bar{f}[d_i(\mathbf{x})]$. A função $d_i(\mathbf{x})$ será definida como a distancia ao hiperplano s_i , $d_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i\mathbf{x} + \mathbf{d}$, o que significa que $d(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in s_i$, $d(\mathbf{x}) \geq 0$ se $\mathbf{x} \in \mathbf{c}_i\mathbf{x} + \mathbf{d} \geq 0$ e $d(\mathbf{x}) < 0$ caso $\mathbf{x} \in \mathbf{c}_i\mathbf{x} + \mathbf{d} < 0$. Se essas funções não forem cuidadosamente escolhidas, o sistema pode não apresentar unicidade de soluções, não podendo assim representar um sistema todo o espaço. Essa característica de unicidade de soluções é conhecida, na área de sistemas híbridos como *well-posedness* (Amaral (2006)).

Se o contradomínio das funções $f[\cdot]$ e $\bar{f}[\cdot]$ possuírem valores intermediários entre 0 e 1 como, por exemplo, funções sigmoidais, o sistema dinâmico resultante terá transição suave e pode ser interpretado como um sistema nebuloso. Se forem funções de limiar, o sistema resultante será então um sistema afim por partes.

A composição da função $f[\cdot]$ com a função distancia $d_i(\mathbf{x})$ determina o chaveamento. Como um determinado politopo é definido como a interseção de um conjunto de semi-espacos, pode-se utilizar a função a seguir para caracterizar a pertinência de um determinado politopo definida pela equação (15):

$$lc_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n_r} f[d_j(\mathbf{x})], \quad (4)$$

sendo n_r o número de hiperplanos que definem o politopo P_i . A função $lc_i(\mathbf{x})$ será chamada lei de chaveamento e significa a equação (4):

$$lc_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in P_i, \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin P_i. \end{cases} \quad (5)$$

Assim, um sistema dinâmico afim por partes pode ser descrito pela equação(17):

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_p} lc_i(\mathbf{x})\mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i), \quad (6)$$

sendo n_p o número de politopos.

2.2 Atrator

Simplificadamente, atrator é a figura geométrica que representa o comportamento assintótico do sistema, num espaço formado pelas variáveis que caracterizam a evolução desse sistema (espaço de estados). Sua bacia de atração é definida como o maior conjunto de pontos nesse espaço, tais que, partindo de um desses pontos, tende-se assintoticamente para esse atrator.

Os quatro possíveis atratores para sistemas não lineares são: atrator pontual, ciclos limites, toro e atrator estranho. O atrator de Rossler é um dos atratores estranhos mais estudados na literatura (Amaral (2006)), (Thomas (2006)), (Ginoux and Letellier (2009)).

2.3 A variedade da Curvatura do Campo

Essa seção foi desenvolvida utilizando o artigo Ginoux and Letellier (2009) como referência. Considerando o conjunto de equações diferenciais representado na equação (7):

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (7)$$

sendo $\dot{\mathbf{X}}$ é o vetor velocidade. O vetor de estados é dados pelas equações (8) e (9):

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in E \subset \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = [F_1(\mathbf{X}), F_2(\mathbf{X}), \dots, F_n(\mathbf{X})]^t \in E \subset \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

O campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ é definido no subespaço E no qual as componentes F_i são contínuas e infinitamente diferenciáveis para todos x_i e t , isto é, funções C^∞ em E com valores em \mathbb{R} . A solução do sistema (1) é a trajetória da curva $\mathbf{X}(t)$. O sistema é autônomo, já que nenhuma das suas componentes depende explicitamente do tempo. O vetor aceleração $\ddot{\mathbf{X}}$ do sistema dinâmico pode ser escrito de acordo com a equação (10):

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{X}}, \quad (10)$$

sendo \mathbf{J} a matriz Jacobiana do sistema. A trajetória de curvas do sistema dinâmico (7) pode ser visto como curvas no sistema euclidiano n -dimensional. Possuem propriedades métricas denominadas curvaturas que podem ser deduzidas analiticamente.

O conjunto de pontos onde a curvatura do campo tende a zero define a variedade da curvatura do campo de dimensão $(n-1)$. Ela pode ser definida de acordo com as equações (11) e (12):

$$\phi(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} \cdot (\ddot{\mathbf{X}} \wedge \ddot{\mathbf{X}} \wedge \dots \wedge \mathbf{X}^n) = \quad (11)$$

$$\det(\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots, \mathbf{X}^n) = 0, \quad (12)$$

em que \mathbf{X}^n representa quantas vezes \mathbf{X} foi derivado, " \wedge " é o produto vetorial e " \cdot " é o produto escalar. Diferenciando (10) no tempo chega-se na equação (13):

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{X}} + \frac{d\mathbf{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}}. \quad (13)$$

Inserindo a expressão (13) em (11) chega-se na equação (14), a equação da variedade da curvatura do campo:

$$\phi(\mathbf{X}) = \underbrace{\dot{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{J}\dot{\mathbf{X}} \wedge \mathbf{J}\ddot{\mathbf{X}})}_{\phi_c} + \underbrace{\dot{\mathbf{X}} \cdot (\ddot{\mathbf{X}} \wedge \frac{d\mathbf{J}}{dt}\dot{\mathbf{X}})}_{\phi_t}, \quad (14)$$

sendo a primeira parte ϕ_c independente do tempo e a segunda ϕ_t a parte dependente do tempo.

Na vizinhança dos pontos fixos \mathbf{X}^* a componente independente do tempo da equação (14) corresponde ao plano osculante. Como consequência, o atrator toma a forma de ϕ_c em sua vizinhança, pois o plano osculante não pode ser cortado por nenhuma trajetória.

2.4 Sistemas Dinâmicos e Curvas do Núcleo de Vórtice

Segundo as definições de Gilmore et al. (2010) nos pontos fixos do retrato de fases, os autovetores da matriz jacobiana definem o local das variedades estáveis e instáveis. Pode haver pontos no espaço de fases onde dois autovalores formam um par complexo conjugado e exista outro autovalor real, esse paralelo ao vetor campo que define o fluxo. Sob essas condições, espera-se que o campo na vizinhança desses pontos siga a direção do campo como um redemoinho assim como o ar gira em torno do centro de um tornado. Essa condição pode ser expressa na equação (15):

$$\mathbf{JV} = \lambda \mathbf{V} = \mathbf{g}, \quad (15)$$

onde \mathbf{g} é a aceleração. Essa condição pode ser reescrita de acordo com a equação (16):

$$\mathbf{g}_i = \frac{d}{dt} f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{dx_s}{dx} = J_{is} f_s = \lambda f_i. \quad (16)$$

A condição que o campo da aceleração é proporcional ao campo da velocidade $\dot{x}_i = \lambda \dot{x}_i$ ou $\dot{f}_i = \lambda f_i$ pode ser representada pela equação (17):

$$\frac{\dot{f}_1}{f_1} = \frac{\dot{f}_2}{f_2} = \frac{\dot{f}_3}{f_3} = \lambda. \quad (17)$$

A interseção das superfícies definidas nas igualdades das equações (16) e (17) definem um conjunto unidimensional no espaço de fases. Esse conjunto é uma curva suave que passa pelos pontos fixos. Alternativamente, as três equações definem um conjunto unidimensional no espaço de fases pelos autovalores $\lambda : (x_1, x_2, x_3, \lambda)$. A projeção do conjunto unidimensional de \mathbb{R}^{3+1} para o espaço de fases \mathbb{R}^3 define as curvas conectantes para um sistema dinâmico. O vetor velocidade é tangente à trajetória, exceto nos pontos fixos onde ele é nulo. Se a equação da aceleração é a derivada da velocidade, sabemos que nas variedades dos pontos fixos, elas também são nulas.

2.5 Nullclines e Nullcline intersections

Essa subseção foi desenvolvida baseada nos conceitos de Thomas (2006).

Em sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais, os pontos fixos são definidos como as soluções reais do sistema. Tomando separadamente, cada equação de espaço de estados define uma *nullcline*. Em um sistema de n variáveis as

nullclines são de dimensão $n-1$, suas intersecções $n-2$ e assim até o ponto fixo (dimensão zero).

É sabido que o campo vetorial é organizado em volta dos pontos fixos. Em sistemas tridimensionais ele não é organizado somente em volta dos pontos fixos mas também pelas intersecções de suas *nullclines*. A forma da trajetória é influenciada pelas *nullclines*, e suas intersecções. As *nullclines* dividem o campo vetorial em espaços e cada parte desses espaços tem um comportamento vetorial específico.

3 Estudo de Caso

3.1 Sistema Linz

Foi escolhido o sistema de Linz para o estudo de caso, encontrado em Sprott and Linz (2000). A equação (18) define o sistema Linz:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} - |x| + 1 = 0. \quad (18)$$

O sistema exibe caos para $a=0,6$ e $b=1$. Assumindo que o chaveamento acontece em $x = 0$ o sistema possui o atrator estranho da Figura (1). Analisando a forma do atrator, percebe-se que ele é do tipo rossler, com dois pontos fixos do tipo sela-nó em $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$.

Seu sistema afim por partes pode ser escrito conforme as equações (20) e (21):

Se $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= x - by - az - 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Se $x \leq 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -x - by - az - 1. \end{aligned} \quad (20)$$

4 Resultados

4.1 Sistema afim por partes de Linz

O sistema de Linz foi simulado para diferentes superfícies de chaveamento $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x = s\}$. Para cada sistema simulado, uma análise dessa superfície foi feita.

O atrator afim por partes com superfície de chaveamento em $s = 0$ está mostrado na Figura 1, e a superfície de chaveamento está demonstrada na Figura 2 com as variedades instáveis e estáveis, as *nullclines*, os pontos de interseção de cada sistema afim com a superfície.

O plano da variedade de cada ponto fixo é equivalente a variedade da curvatura definido em Ginoux and Letellier (2009). As variedades unidimensionais são equivalentes às curvas conectantes (Gilmore et al. (2010)). Nas curvas conectantes, isso é explicado pois somente na trajetória definida

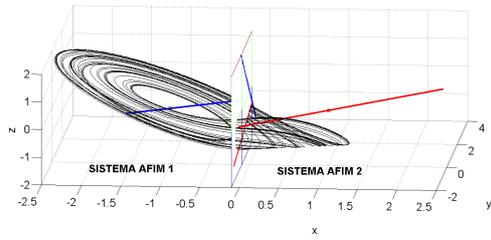


Figura 1: Atrator do sistema afim por partes de Linz com $a = 0,6$, $b = 1$, superfície de chaveamento em $s = 0$ e condições iniciais $(0, 1; 0, 1; 0, 1)$ retirado o transitório.

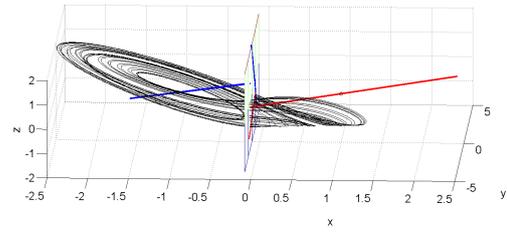


Figura 3: Atrator do sistema afim por partes de Linz com $a = 0,6$, $b = 1$, superfície de chaveamento em $s = -0,1$ e condições iniciais $(0, 1; 0, 1; 0, 1)$ retirado o transitório.

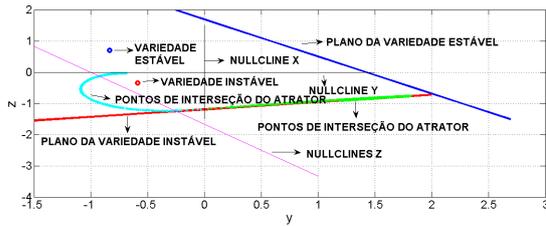


Figura 2: Superfície de chaveamento do atrator afim por partes com $a = 0,6$, $b = 1$, superfície de chaveamento em $s = 0$ e condições iniciais $(0,1, 0,1, 0,1)$.

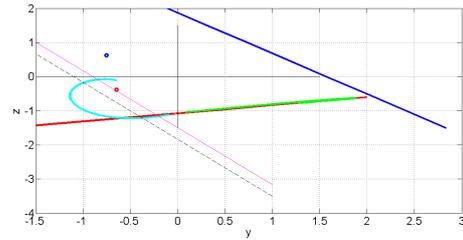


Figura 4: Superfície de chaveamento do atrator afim por partes com $a = 0,6$, $b = 1$, superfície de chaveamento em $s = -0,1$ e condições iniciais $(0, 1; 0, 1; 0, 1)$.

na reta determinada pelo autovetor do autovalor real é que a aceleração e velocidade são colineares, ou seja, a componente tangencial da aceleração é nula. Na definição da variedade da curvatura do campo é sabido que a variedade da curvatura é definida no local em que o produto vetorial das componentes da aceleração e derivada da aceleração multiplicada pelo vetor velocidade é igual a zero. E, para o caso de sistemas lineares, esse comportamento ocorre nas variedades unidimensionais.

Na Figura 4 percebe-se que os pontos de interseção do atrator com a superfície de chaveamento são limitados pelo plano da variedade estável. Uma outra análise a ser feita é relacionada com os pontos do atrator com as *nullclines*. Percebe-se que a *nullcline Z* intercepta os pontos do atrator que cruzam a superfície de chaveamento de um sistema afim para o outro. Além disso, sabe-se que a *nullcline* divide o espaço. Nesse caso, pode-se perceber que a *nullcline X* delimita regiões em que os pontos do atrator cruzam a superfície. Do seu lado esquerdo, percebemos que esses pontos estão cortando a superfície de chaveamento em uma direção (sistema afim 20 para sistema afim 19) e do lado direito, na direção contrária (sistema afim 19 para sistema afim 20).

Na figura 3 está o atrator estranho para a superfície de chaveamento em $x = -0,1$ e o plano da superfície está na Figura 4. Para o valor $x = -0,1$ da superfície da chaveamento, pode-se perceber que o atrator estranho é formado. As análises fei-

tas para a superfície em $x = 0$ podem ser utilizadas para esse caso. As *nullclines Z1* e *Z2* mais uma vez interceptam os pontos do atrator, a *nullcline X* está dividindo o espaço e o atrator é formado abaixo da interseção do plano estável com a superfície de chaveamento.

Para valores positivos, acima de $s = 0,1$ não existe a formação de nenhuma figura no espaço vetorial. Para valores de superfície de chaveamento compreendidas entre $s = 0,1$ a $s = -0,2$ as mesmas análises foram feitos obtendo resultados semelhantes à análise de $s = 0$ e $s = -0,1$.

Para a superfície de chaveamento em $x = -0,3$ notamos que o atrator estranho não foi reproduzido, e sim, um ciclo limite, como pode ser visto na Figura (5). Percebe-se diferenças na superfície de chaveamento da Figura 6 e em relação às superfícies de chaveamento com a formação de atratores estranhos. Quando um ciclo limite é formado, as *nullclines Z1* e *Z2* não interceptam os pontos do atrator. Além disso, a interseção da variedade instável ocorre entre as *nullclines Z1* e *Z2*, diferente de quando existia a formação de um atrator estranho, onde a interseção da variedade instável ocorria acima das *nullclines Z1* e *Z2*.

Para valores abaixo de $x = -0,4$ não existe a formação do atrator. Percebe-se que, para $s = -0,3$, os pontos de interseção do atrator com o plano estável já estão próximos e para $s = -0,4$ estão no limiar. O plano estável, portanto pode ser então considerado superfície limitante de aparição de atratores e o mesmo só irá formar-se caso

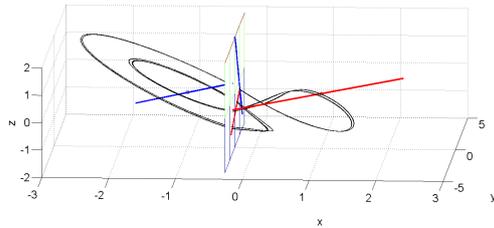


Figura 5: Atrator do sistema afim por partes de Linz com $a = 0,6$, $b = 1$, superfície de chaveamento em $s = -0,3$ e condições iniciais $(0, 1; 0, 1; 0, 1)$ retirado o transitório.

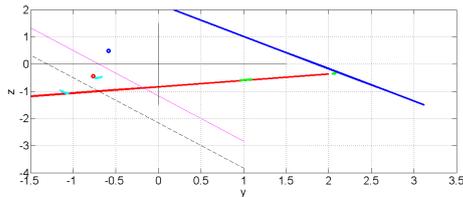


Figura 6: Superfície de chaveamento do atrator afim por partes com $a = 0,6$, $b = 1$, superfície de chaveamento em $s = -0,3$ e condições iniciais $(0, 1; 0, 1; 0, 1)$.

seja inicializado em um valor que está abaixo desse plano. Testes foram feitos inicializando o sistema abaixo do plano estável e o atrator formava-se. Acima do plano limitante, o sistema é instável.

5 Conclusões

A análise da superfície de chaveamento de sistemas não lineares afim por partes ainda é um assunto pouco estudado na literatura. Com esse artigo foi feita uma revisão de três ferramentas de análise (*nullclines*, curvas conectantes e curvas do núcleo de vórtice) e um estudo de caso foi feito para um sistema afim por partes que possui um atrator caótico do tipo Rossler. Foi analisado suas respectivas superfícies de chaveamento e descobriu-se características comuns para superfícies de atratores estranhos e características comuns em superfícies de chaveamento de ciclos limites mas diferentes quando comparadas entre si.

Essas informações são relevante, visto que as *nullclines*, as curvas conectantes e a variedade da curvatura do campo são ferramentas analíticas, que podem ser retiradas com as equações do sistema. Ter uma informação *a priori* sobre o tipo de comportamento dinâmico que o sistema irá ter somente com suas equações, possibilita realizar a modelagem do mesmo objetivando um comportamento caótico específico. Para trabalhos futuros, é interessante aplicar a mesma análise para sistemas caóticos com estruturas diferentes.

Agradecimentos

Os autores agradecem o Programa de Pós Graduação de Engenharia Elétrica (PPGEL) da UFSJ e o Projeto REUNI.

Referências

- Aguirre, L. A. (2007). *Introducao a Identificacao de Sistemas: tecnicas lineares e nao-lineares aplicadas a sistemas reais*, Editora da UFMG. 3a edicao.
- Amaral, G. F. V. (2006). *Sintese de Dinamica nao Linear Por meio de Modelos Afins Por Partes : Um Metodo Baseado em Topologia*, PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Amaral, G. F. V., Letellier, C. and Aguirre, L. A. (2006). Piecewise affine models of chaotic attractors: The rossler and lorenz systems, *Chaos* **16**: 013115 –1–14.
- Gilmore, R., Ginoux, J., Jones, T., Letellier, C. and Freitas, U. S. (2010). Connecting curves for dynamical systems, *Journal of Physics* **43**(255101): (9pp).
- Ginoux, J. and Letellier, C. (2009). Flow curvature manifold for shaping chaotic attractors: I. rossler- like systems, *Journal of Physics* **42**: 17pp.
- Ginoux, J. and Rossetto, B. (2006). Differential geometry and mechanics: Applications to chaotic dynamical systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16**(4): 887–910.
- Letellier, C., Roulin, E. and Rossler, O. E. (2006). Inequivalent topologies of chaos in simple equations, *Chaos, Solitons and Fractals* **28**(28): 337–360.
- Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas Dinamicos*, Fisica Editora. 2ª edicao.
- Poincare, H. (1890). Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique., *Acta Mathematica*. **270**: 13:1.
- Sontag, E. D. (1981). Nonlinear regulation: The piecewise linear approach, *IEEE Trans. Circ. Syst.* **AC**.
- Sprott, J. and Linz, S. (2000). Algebraically simple chaotic flows, *International Journal of Chaos Theory and Applications* **5**(2): 1–20.
- Thomas, R. (2006). Nullclines and nullcline intersections, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **16**(10): 3023–3033.