

IDENTIFICAÇÃO DE MODELOS DE ORDEM REDUZIDA UTILIZANDO MODELOS EM BASES DE FUNÇÕES ORTONORMAIS COM ATRASO

JOÃO BATISTA M. SANTOS*, PÉRICLES R. BARROS*

**Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande - PB, Brasil*

Emails: joabatista@dee.ufcg.edu.br, prbarros@dee.ufcg.edu.br

Abstract— Reduced order models are common used on controllers design. More specifically, FOPTD models are the most used models to tune PID controllers. In this work is proposed a model reduction technique with or without residue compensation for FOPTD models estimation and the combined OBF-TD models, an OBF part and a TD part, are defined. OBF models have several advantages over the conventional linear models (ARX, FIR, ARMAX, OE e BJ). As the time delay is handled separately, it is possible to directly obtain FOPTD models and the model order can be chosen to improve model performance.

Keywords— System identificação, FOPTD models, OBF models, models reduction

Resumo— Os modelos de ordem reduzida são muito utilizados na análise e no projeto de controladores. Particularmente, os modelos FOPTD são os mais utilizados na sintonia de controladores PID. Neste trabalho é proposta uma técnica de redução com ou sem compensação do resíduo para estimação de modelos FOPTD e são definidos os modelos combinados OBF-TD, uma parte OBF (bases de funções ortonormais) e uma parte TD (atraso). Modelos OBF possuem diversas vantagens com relação aos modelos lineares mais utilizados (ARX, FIR, ARMAX, OE e BJ). Além disso, como o atraso é representado de forma separada, é possível obter diretamente modelos FOPTD ou escolher a ordem do modelo de modo a reduzir o erro de estimação.

Keywords— Identificação de sistemas, modelos FOPTD, modelos OBF, redução de modelos.

1 Introdução

A identificação de modelos de ordem reduzida é de grande importância para o projeto e sintonia de controladores PID. Os modelos mais utilizados são os de primeira ordem com atraso (FOPTD). O sucesso na utilização dos modelos de ordem reduzida se deve ao fato de a região de frequência, na qual a fase varia de 0 até $-\pi$ rad, refletir a característica fundamental da resposta do sistema (Leva, 2005).

Duas abordagens podem ser tomadas na identificação desses tipos de modelos: estimação direta do modelo de ordem reduzida; estimação de um modelo de ordem superior (ordem maior que um) e utilização de uma técnica de redução para a ordem escolhida. Considerando a segunda abordagem, os modelos lineares mais utilizados são: resposta ao impulso finita (FIR); autorregressivos com entrada exógena (ARX); autorregressivos com média móvel e entrada exógena (ARMAX); erro na saída (OE); Box-Jenkins (BJ) (Ljung, 1999).

No entanto, modelos em bases de funções ortonormais (OBF) possuem diversas vantagens com relação aos modelos lineares mais utilizados (Tufa et al., 2011). O número de parâmetros necessários para representar as dinâmicas do processo é menor (parcimônia), a modelo é linear nos parâmetros (otimização convexa) e os modelos do processo e do ruído podem ser parametrizados de forma independente (Heuberger et al., 2005).

A utilização de modelos OBF na aproximação de processos com atraso resulta em modelos com

ordens desnecessariamente elevadas devido à representação em série infinita do atraso (Santos and Barros, 2012). No entanto, caso o atraso seja conhecido, é possível tratá-lo separadamente. Assim, o modelo do processo pode ser um modelo combinado formado por uma parte OBF e uma parte de atraso TD. Este modelo é chamado de modelo OBF-TD (bases de funções ortonormais com atraso). Nesse caso, a ordem do modelo pode ser escolhida de modo a reduzir o erro na representação das dinâmicas, além de também ser possível obter diretamente modelos FOPTD.

O objetivo deste trabalho é estimar modelos FOPTD utilizando modelos OBF-TD. Primeiro é estimado um modelo OBF-TD de ordem superior e em seguida é aplicada a técnica de redução de modelos apresentada neste trabalho de modo a obter o modelo FOPTD. Para as funções que formam as bases do modelo OBF-TD são utilizadas as funções de Laguerre. O mesmo procedimento aplicado para modelos FOPTD pode ser utilizado para modelos SOPTD com modificações na escolha da base e no procedimento de estimação.

Este trabalho é organizado da seguinte forma: na Seção 2 são definidos os modelos OBF-TD tanto em função de transferência como em espaço de estados; na Seção 3 são discutidos os procedimentos de redução de modelos com e sem compensação de resíduo; na Seção 4 segue o exemplo de simulação; e na Seção 5 seguem as conclusões.

2 Modelos OBF-TD

O modelo OBF-TD é um modelo combinado formado por um modelo OBF e um modelo de atraso TD. Isso é possível se o atraso for conhecido. Segue na definição seguinte:

Definição 1 Considere a função de transferência do processo $G(s)$ com atraso não nulo L e realize a decomposição $G(s) = \tilde{G}(s)e^{-Ls}$. A função de transferência $\tilde{G}(s)$ pode ser descrita utilizando um modelo OBF de ordem n como

$$\tilde{G}(s) = c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \dots + c_nF_n(s) \quad (1)$$

em que o conjunto $\{F_i(s)\}_{i=1}^n$ é formado pelas funções ortonormais de Takenaka-Malmquist (Takenaka, 1925; Malmquist, 1925)

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2\operatorname{Re}(\xi_k)}}{s + \xi_k} \prod_{i=1}^{k-1} \left[\frac{s - \xi_i^*}{s + \xi_i} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

em que $\xi_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\xi_i) \geq 0$, e os c_i 's são os coeficientes da base. O modelo OBF-TD de $G(s)$ é, então, dado por

$$G(s) = (c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \dots + c_nF_n(s))e^{-sL} \quad (3)$$

em que n é a ordem do modelo.

Como o atraso é tratado de forma separada nos modelos OBF-TD, a ordem pode ser escolhida de modo a reduzir o erro de estimação, dado que mais membros da série infinita são considerados. Por outro lado, caso sejam utilizados modelos OBF, o atraso é incluído na representação e a ordem do modelo é desnecessariamente elevada, já que este é representado juntamente com as dinâmicas.

A escolha da função base determina a classe de processos que podem ser adequadamente representados pelo modelo OBF-TD. Neste trabalho são consideradas as funções de Laguerre. Essas funções são casos particulares das funções de Takenaka-Malmquist em que os polos ξ_i são reais e iguais ($\xi_i = p$).

As funções de Laguerre são dadas pela função base

$$F_k(s) = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \left(\frac{s-p}{s+p} \right)^{k-1} \quad (4)$$

em que $k = 1, \dots, n$, p é o polo de Laguerre.

Os modelos OBF-TD também podem ser representados em espaço de estados. Para o caso particular utilizando as funções de Laguerre, a realização em espaço de estados (A, B, C, D) é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -p & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -2p & -p & \dots & 0 \\ -2p & -2p & -2p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2p & -2p & -2p & \dots & -p \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1\sqrt{2p} \\ c_2\sqrt{2p} \\ c_3\sqrt{2p} \\ \vdots \\ c_n\sqrt{2p} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

$$D = 0. \quad (8)$$

Assim, o modelo OBF-TD em espaço de estados é dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-L) \quad (9)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (10)$$

3 Redução de Modelos OBF-TD

Os procedimentos de redução de modelos mais utilizados são a truncagem balanceada e a residualização balanceada. Nestes procedimentos, o processo com função de transferência $G(s)$ é assumido ser estável e possuir uma realização em espaço de estados balanceada $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$. A realização em espaço de estados é dita balanceada se os gramianos de controlabilidade P e observabilidade Q são iguais e diagonais (Middelton and Goodwin, 1990).

Na realização em espaço de estados balanceada, o tamanho de cada valor singular de Hankel σ_i é uma medida relativa da contribuição do estado x_i na relação entrada/saída do processo. Assim, a partir dos valores singulares de Hankel é possível escolher qual a ordem mais indicada para o modelo reduzido.

Tanto na truncagem balanceada quanto na residualização balanceada, a ordem do modelo reduzido é escolhida de acordo com a magnitude dos valores singulares de Hankel $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, ou seja, a ordem reduzida $n_r < n$ é função do tamanho relativo entre os valores singulares. No entanto, como neste trabalho a ordem do modelo reduzido é fixa, $n_r = 1$ (primeira ordem), as dinâmicas desprezadas podem conter informações importantes sobre o processo. A informação desprezada é chamada de resíduo.

Neste trabalho são apresentados dois procedimentos de redução de modelos: com compensação de resíduo; sem compensação de resíduo.

3.1 Redução de modelos OBF-TD sem compensação do resíduo

O primeiro passo para a estimação de um modelo de ordem reduzida é a obtenção da realização em

espaço de estados (A, B, C, D) do modelo OBF-TD. A realização em espaço de estados é obtida utilizando as Equação (5)-(8).

Em seguida, a realização balanceada $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ é obtida utilizando uma transformação de similaridade em que os Graminianos de controlabilidade P e observabilidade Q são iguais e diagonais ($P = Q = \Sigma$) e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ e $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ são os valores singulares de Hankel.

Com a realização balanceada $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ e o procedimento de redução de modelos da residualização balanceada, é possível obter o modelo de ordem reduzida. É utilizada a residualização balanceada, pois deseja-se um modelo de ordem reduzida relevante nas regiões de baixas e médias frequências. A Proposição seguinte resume a ideia.

Proposição 1 *Seja um modelo OBF-TD com função de transferência $G(s) = e^{-sL} \sum_{k=1}^n c_k F_k(s)$ em que n é a ordem do modelo e $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ a realização em espaço de estados balanceada de $\tilde{G}(s) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(s)$ dado na Equação (1).*

As matrizes $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ são particionadas como

$$A_{bal} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B_{bal} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_{bal} = [C_1 \quad C_2] \quad D_{bal} = D$$

e o modelo de ordem reduzida $n_r = k$ é dado por (A_r, B_r, C_r, D_r) em que

$$A_r = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (11)$$

$$B_r = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \quad (12)$$

$$C_r = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21} \quad (13)$$

$$D_r = D_{bal} - C_2A_{22}^{-1}B_2. \quad (14)$$

O modelo OBF-TD de ordem reduzida $n_r = k$ é dado por

$$\dot{x}(t) = A_r x(t) + B_r u(t - L) \quad (15)$$

$$y(t) = C_r x(t) + D_r u(t). \quad (16)$$

Prova 1 *A realização em espaço de estados de um modelo OBF-TD é obtida utilizando os procedimentos apresentados na Seção 2 e a realização em espaço de estados balanceada é obtida utilizando uma transformação de similaridade em que $P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ e $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ são os valores singulares de Hankel como segue em Middleton and Goodwin (1990). A obtenção das matrizes (A_r, B_r, C_r, D_r) a partir das matrizes $(A_{bal}, B_{bal}, C_{bal}, D_{bal})$ é direta utilizando o procedimento de redução de modelos da residualização balanceada. Por fim, basta incluir o atraso na representação em espaço de estados.*

3.2 Redução de modelos OBF-TD com compensação do resíduo

Tanto na truncagem balanceada quanto na residualização balanceada, a ordem do modelo reduzido é escolhida de acordo com a magnitude dos valores singulares de Hankel (a ordem é variável). No entanto, como neste trabalho a ordem reduzida é fixa ($n_r = 1$), o resíduo (dinâmicas desprezadas) pode conter informações importantes sobre o processo. Desse modo, o objetivo é utilizar parte da informação contida no resíduo para refinar o modelo reduzido obtido anteriormente.

A relação entre a função de transferência $G(s)$ e a função de transferência do modelo ordem reduzida $G_{n_r}(s) = e^{-sL} \tilde{G}_{n_r}(s)$ ($\tilde{G}_{n_r}(s)$ é obtido da realização (A_r, B_r, C_r, D_r)) pode ser escrita como

$$G(s) = e^{-sL} \left(\tilde{G}_{n_r}(s) + G_{res}(s) \right) \quad (17)$$

em que $G_{res}(s)$ é o modelo do resíduo.

O modelo do processo é formado por uma contribuição do modelo de ordem reduzida e por uma contribuição do resíduo desconsiderado no processo de redução. Assim, o objetivo da redução com compensação do resíduo é considerar a informação contida em $G_{res}(s)$ e realizar um processo de correção em $G_{n_r}(s)$.

Nesse trabalho o modelo do resíduo é assumido como

$$G_{res}(s) = \beta e^{-sL'} \quad (18)$$

em que β é o ganho e L' é o atraso. Essa estrutura foi escolhida de modo a capturar parte da informação da fase desprezada e manter o problema de estimação linear.

O atraso L' é determinado utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados na informação da fase que foi desprezada. O parâmetro L' resulta na melhor aproximação linear da fase desprezada no sentido dos mínimos quadrados. A Proposição seguinte resume a ideia.

Proposição 2 *Seja o modelo OBF-TD dado por $G(s) = e^{-sL} \left(\tilde{G}_{n_r}(s) + G_{res}(s) \right)$ em que $G_{n_r}(s) = e^{-sL} \tilde{G}_{n_r}(s)$ é o modelo de ordem reduzida n_r e $G_{res}(s) = \beta e^{-sL'}$ é o modelo do resíduo. O atraso L' é calculado utilizando o algoritmo dos mínimos quadrados na fase desprezada (fase do modelo do resíduo) fazendo*

$$\hat{\theta}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_N} \varphi(\omega) \varphi(\omega)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_N} \varphi(\omega) y(\omega) \right] \quad (19)$$

com $\hat{\theta}_N = L'$, N é o número de pontos de frequência e

$$\varphi(\omega) = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_N] \quad (20)$$

$$y(\omega) = [\phi(\omega_1) \quad \phi(\omega_2) \quad \dots \quad \phi(\omega_N)] \quad (21)$$

em que $\phi(\omega_i) = \angle \sum_{k=n_r+1}^n c_k F_k(\omega_i)$.

Substituindo o modelo do resíduo dado na Equação (18) na Equação (17) e decompondo as funções de transferência tem-se

$$G(s) \approx e^{-sL} \left(\tilde{G}_{n_r}(s) + \beta e^{-sL'} \right) \quad (22)$$

$$G(s) \approx e^{-sL} e^{-sL'} \left(e^{sL'} \tilde{G}_{n_r}(s) + \beta \right) \quad (23)$$

$$G(s) \approx e^{-s\bar{L}} \left(\bar{G}_{n_r}(s) + \beta \right) \quad (24)$$

em que $\bar{L} = L + L'$ é o atraso atualizado e $\bar{G}_{n_r}(s) = e^{sL'} \tilde{G}_{n_r}(s)$ é o modelo de ordem reduzida atualizado.

Para o caso em que $n_r = 1$, $\tilde{G}_{n_r}(s)$ e $\bar{G}_{n_r}(s)$ são funções de transferência de primeira ordem da forma $\frac{K}{Ts+1}$ e $\frac{K}{\bar{T}s+1} e^{sL'}$, respectivamente. A partir do atraso L' , é possível modificar a constante de tempo T de diversas formas, neste trabalho a constante de tempo do modelo corrigido \bar{T} é dada pela soma entre a constante de tempo original mais o atraso da compensação ($\bar{T} = T + L'$).

Assim, o modelo reduzido $\tilde{G}_{n_r}(s)$ contém parte da informação do resíduo que anteriormente era totalmente desprezada. A informação contida no resíduo modificou tanto o atraso L para o novo atraso \bar{L} quanto as dinâmicas representadas pelo modelo $\tilde{G}_{n_r}(s)$ para $\bar{G}_{n_r}(s)$.

Todo o procedimento descrito anteriormente é resumido no Algoritmo seguinte.

Algoritmo 1 *Estimação de modelos OBF-TD de ordem reduzida com compensação de resíduo.*

1. Obtenha a realização em espaço de estados do modelo OBF-TD;
2. Obtenha a realização em espaço de estados balanceada;
3. Escolha a ordem do modelo reduzido n_r e obtenha o modelo reduzido $G_{n_r}(s)$ usando a Proposição 1.
4. Dado o modelo do resíduo $G_{res}(s)$, calcule L' utilizando a Proposição 2.
5. Atualize a constante de tempo como $\bar{T} = T + L'$ e o atraso como $\bar{L} = L + L'$.

4 Exemplo de Simulação

A função de custo utilizada na comparação das técnicas de identificação no domínio do tempo é

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(kT_s) - \hat{y}(kT_s)]^2 \quad (25)$$

em que $y(kT_s)$ e $\hat{y}(kT_s)$ é a saída do processo real e estimada, respectivamente.

No domínio da frequência é dada por

$$E = \frac{1}{N_\omega} \sum_{k=0}^{N_\omega-1} |G(j\omega_k) - \hat{G}(j\omega_k)| \quad (26)$$

em que N_ω é o número de pontos de frequência, $G(j\omega_k)$ é a resposta em frequência do processo e $\hat{G}(j\omega_k)$ é a resposta em frequência do modelo identificado.

O período de amostragem utilizado é igual a 0,01 segundos.

4.1 Parte I

O processo utilizado como exemplo é de terceira ordem com atraso e o objetivo desta Parte I é obter o modelo OBF-TD de ordem superior. A função de transferência do processo é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(10s+1)^3} e^{-20s}. \quad (27)$$

As funções utilizadas para formar as bases do modelo OBF-TD são as funções de Laguerre. O polo de Laguerre foi escolhido como $p = 1/20,28$ (obtido a partir da técnica proposta em Santos and Barros (2012)).

Em seguida são escolhidas diversas ordens n para o modelo OBF-TD e os coeficientes são estimados. Os valores dos coeficientes em função da ordem escolhida seguem na Tabela 1.

Tabela 1: Coeficientes estimados OBF-TD3 (n=3), OBF-TD4 (n=4) e OBF-TD5 (n=5)

Ordem n	n=3	n=4	n=5
c_1	0,092	0,091	0,089
c_2	-0,095	-0,099	-0,098
c_3	-0,028	-0,036	-0,030
c_4	--	0,005	0,004
c_5	--	--	0,008

Na Figura 1 seguem as respostas ao degrau unitário para os modelos OBF-TD3, OBF-TD4, OBF-TD5 e para o modelo OBF com $n = 5$ obtido utilizando a técnica W&C apresentada em Wang and Cluett (2000). Nesta técnica o polo é escolhido como o polo ótimo obtido a partir de uma procura baseada na resposta ao degrau do processo. Na Figura 2 seguem os diagramas de Nyquist.

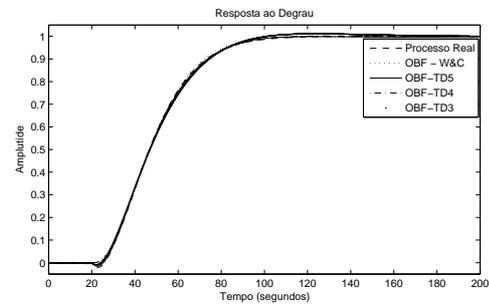


Figura 1: Resposta ao degrau

Os resultados obtidos utilizando os modelos OBF-TD4 e OBF-TD5 são muito próximos

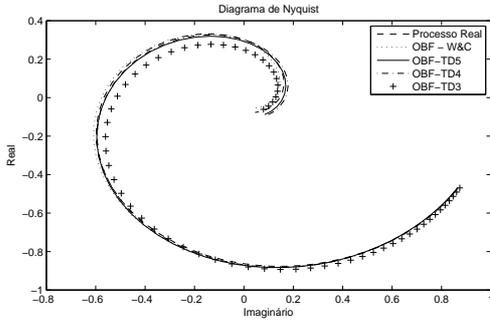


Figura 2: Diagramas de Nyquist

aos resultados obtidos utilizando o modelo OBF baseado na escolha ótima do polo. O modelo OBF-TD3 apresenta bons resultados na região de baixa frequência até próximo da frequência em que a fase é -145° e se degrada para frequências maiores.

Na Tabela 2 seguem os erros nos domínios do tempo e da frequência para cada um desses modelos. Como observado anteriormente, o modelo baseado na escolha ótima do polo resulta na melhor aproximação seguido do modelo OBF-TD5.

Tabela 2: Valores dos erros ε e E

	ε	E
W&C	$1,27 \times 10^{-5}$	0,011
OBF-TD5	$1,45 \times 10^{-5}$	0,014
OBF-TD4	$2,67 \times 10^{-5}$	0,015
OBF-TD3	$1,27 \times 10^{-4}$	0,036

4.2 Parte II

Na Parte II, o objetivo é obter o modelo de ordem reduzida de primeira ordem com atraso ($n_r = 1$) a partir do modelo de ordem superior OBF-TD5 obtido na Parte I.

O primeiro passo é obter a realização em espaço de estados do modelo OBF-TD5 e, em seguida, é necessário obter a realização em espaço de estados balanceada. A função de transferência da realização em espaço de estados balanceada do modelo OBF-TD5 é dada por

$$G_{bal}(s) = \frac{B_{bal}(s)}{A_{bal}(s)} e^{-20,1s} \quad (28)$$

em que

$$\begin{aligned} B_{bal}(s) &= -1,35 \times 10^{-2} s^4 + 2,88 \times 10^{-3} s^3 + \\ &+ 4,91 \times 10^{-4} s^2 + 2,07 \times 10^{-5} s + \\ &+ 2,91 \times 10^{-7} \\ A_{bal}(s) &= s^5 + 0,24s^4 + 2,43 \times 10^{-2} s^3 + \\ &+ 1,19 \times 10^{-3} s^2 + 2,95 \times 10^{-5} s + \\ &+ 2,91 \times 10^{-7}. \end{aligned}$$

A partir da realização balanceada e da escolha da ordem do modelo reduzido $n_r = 1$, é possível

encontrar a função de transferência do modelo reduzido $G_{n_r}(s)$ sem compensação do resíduo utilizando o Proposição 1. O modelo $G_{n_r}(s)$ é dado por

$$G_{n_r}(s) = \frac{-0,323s + 0,042}{s + 0,043} e^{-20,1s}. \quad (29)$$

Em seguida é preciso avaliar a necessidade da compensação do resíduo, ou seja, se é necessário levar em consideração as dinâmicas de ordem superior desprezadas após a redução do modelo. Neste trabalho, a avaliação é realizada a partir dos valores singulares de Hankel. A matriz de valores singulares de Hankel Σ obtido neste exemplo é dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0,662 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,163 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0003 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

A partir da matriz Σ é possível concluir que a ordem do modelo reduzido deveria ser pelo menos ordem 2, ou seja, os dois primeiros estados associados aos dois primeiros valores singulares de Hankel deveriam ser considerados na redução. Como a ordem do modelo reduzido é $n_r = 1$ a correção das dinâmicas desconsideradas é necessária.

Assim, o atraso e a constante de tempo do modelo de ordem reduzida $G_{n_r}(s)$ devem ser corrigidos para levar em consideração as dinâmicas desprezadas após a redução. O atraso L' do modelo do resíduo $G_{res}(s)$ é obtido utilizando a Proposição 2. O atraso é $L' = 1,03$ segundos.

Utilizando L' , o atraso e a constante de tempo do modelo de ordem reduzida $G_{n_r}(s)$ são corrigidos como no Algoritmo 1. Após a correção e a aproximação do zero como um ganho mais um atraso, o modelo de ordem reduzida atualizado $\tilde{G}_{n_r}(s)$ é dado por

$$\tilde{G}_{n_r}(s) = \frac{0,047}{s + 0,047} e^{-30,4s}. \quad (31)$$

Outra possibilidade na obtenção de um modelo de ordem reduzida a partir do modelo OBF-TD5 seria truncar diretamente esse modelo de ordem superior considerando apenas o primeiro coeficiente. Esse modelo é chamada de OBF-TD1 truncado.

Também para comparação, foi utilizada a técnica proposta em Skogestad (2003) para obtenção de um modelo de primeira ordem com atraso. A aproximação de primeira ordem resultante é

$$G_{sk}(s) = \frac{0,067}{s + 0,067} e^{-35s}. \quad (32)$$

Segue na Figura 3 as respostas ao degrau do modelo $\tilde{G}_{n_r}(s)$, do modelo $G_{sk}(s)$ e do modelo

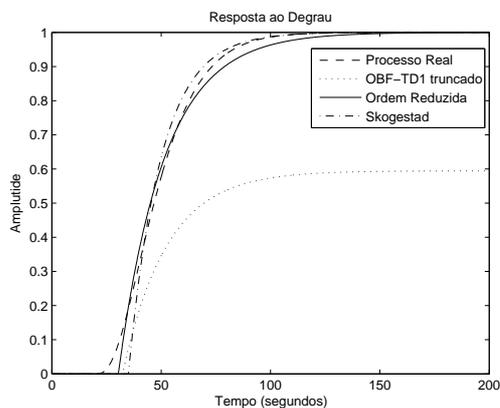


Figura 3: Exemplo 4 - Resposta ao degrau

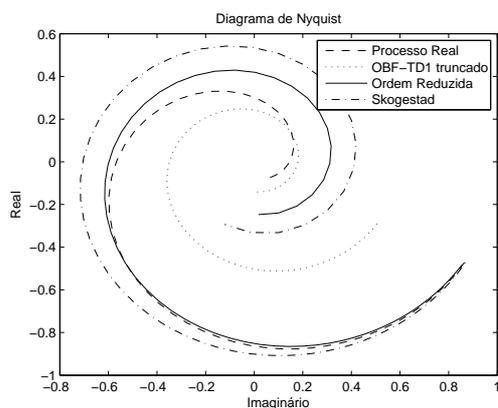


Figura 4: Exemplo 4 - Diagramas de Nyquist

OBF-TD1 truncado. Já na na Figura 4 seguem os diagramas de Nyquist.

O modelo de primeira ordem com atraso que melhor representa o processo tanto no domínio do tempo quanto da frequência é o modelo $\bar{G}_{nr}(s)$ em que a compensação do resíduo foi realizada. O modelo $G_{sk}(s)$ aproxima bem o processo do ponto de vista da resposta ao degrau, mas é ruim quando avaliado em uma região mais ampla de frequências. O modelo OBF-TD1 truncado resulta na pior representação de todas. Isto é esperado pois, o procedimento de truncagem representa bem na região de altas frequências como pode ser observado no diagram de Nyquist.

Assim, o modelo de ordem reduzida com compensação do resíduo $\bar{G}_{nr}(s)$ resultou na melhor aproximação. Além disso, a solução do problema foi simples e linear.

5 Conclusão

Neste trabalho foram definidos os modelos OBF-TD (modelo OBF + modelo TD) e apresentados os procedimentos utilizados para a estimação de modelos de ordem superior e estimação de modelos FOPTD. A estimação de modelos FOPTD foi

realizada a partir de uma técnica de redução com ou sem a compensação do resíduo. Foram discutidas as propriedades e necessidades em se compensar o resíduo. O modelo do resíduo utilizado foi o mais simples de modo a manter o problema linear e com apenas um parâmetro para estimar. O exemplo de simulação ilustrou as características, vantagens e desvantagens em se utilizar o que foi proposto.

Referências

- Heuberger, P., den Hof, P. V. and Wahlberg, B. (2005). *Modeling and Identification with Rational Orthonormal Basis Functions*, Springer-Verlag London Limited, USA.
- Leva, A. (2005). Model-based proportional-integral-derivative autotuning improved with relay feedback identification., *IEE Control Theory Applications* **152**(2): 247–256.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, New York, USA.
- Malmquist, F. (1925). Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points, *Comptes Rendus du Sixième Congrès des mathématiciens scandinaves* pp. 253–259.
- Middelton, R. H. and Goodwin, G. C. (1990). *Digital Control and Estimation*, Prentice Hall, New York, USA.
- Santos, J. B. M. and Barros, P. R. (2012). Preliminary process information and its use in obftd model estimation, 16th IFAC Symposium on System Identification, Bruxelas, Bélgica, pp. 1808–1813.
- Skogestad, S. (2003). Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning, *Journal of Process Control* **13**: 291–309.
- Takenaka, S. (1925). On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, *Japanese Journal of Mathematics* **2**: 129–145.
- Tufa, L., Ramasamy, M. and Shuhaimi, M. (2011). Improved method for development of parsimonious orthonormal basis filter models, *Journal of Process Control* **21**: 36–45.
- Wang, L. and Cluett, W. (2000). *From Plant Data to Process Control - Ideas for process identification and PID design*, Taylor & Francis, London, England.