

# RELAXAÇÃO DA TAXA DE CONVERGÊNCIA E REDUÇÃO DE NORMA APLICADAS À ESTIMAÇÃO DE ESTADO EM SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

VICTOR LEONARDO YOSHIMURA\*, EDVALDO ASSUNÇÃO†, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA†, EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA‡, EDSON ITALO MAINARDI JÚNIOR§

\*IFMT - Instituto Federal de Mato Grosso, Campus Cel. Octayde Jorge da Silva  
Rua Zulmira Canavarros, 95. Centro Norte. 78005-200  
Cuiabá, MT, Brasil

†Faculdade de Engenharia  
UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus Ilha Solteira  
Avenida José Carlos Rossi, 1370. 15385-000  
Ilha Solteira, SP, Brasil

‡UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio  
Avenida Alberto Carazzai, 1640. 86300-000  
Cornélio Procópio, PR, Brasil

§IFC - Instituto Federal Catarinense, Campus Videira  
Rodovia SC 135 - 89560-000  
Videira, SC, Brasil

Emails: victor.yoshimura@cba.ifmt.edu.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br,  
marcelo@dee.feis.unesp.br, e.ravazzi@bol.com.br, edsonitalo@yahoo.com.br

**Abstract**— This paper deals with some LMI techniques applied to state estimation in Switched Affine Systems, namely: the relaxation on the search for a convergence rate for the estimator and the inclusion of the guaranteed Frobenius norm for the output gain matrices. For the first, the so-called Finsler's Lemma, also known as elimination or inclusion Lemma, is applied, while for the latter a LMI is proposed. The validity of the found LMIs is verified through simulations in DC-DC converters, which are natural applications of the Switched Affine Systems theory.

**Keywords**— Switched affine systems, linear matrix inequalities, convergence rate, Frobenius norm, DC-DC converters.

**Resumo**— Este artigo trata de algumas técnicas LMI aplicadas à estimação de estado em Sistemas Chaveados Afins, a saber: a relaxação da busca por uma taxa de convergência do estimador e a inclusão da norma de Frobenius garantida para as matrizes de ganho da saída. Para a primeira, aplica-se o Lema de Finsler, também conhecido como lema da eliminação ou inserção, enquanto para a segunda, uma LMI é proposta. A validade das LMIs encontradas é verificada através de simulações em conversores CC-CC, os quais são aplicações naturais da teoria dos Sistemas Chaveados Afins.

**Palavras-chave**— Sistemas Chaveados Afins, Desigualdades Matriciais Lineares, taxa de convergência, norma de Frobenius, conversores CC-CC.

## 1 Introdução

Os Sistemas Chaveados (SCs) têm sido alvo de pesquisas nas últimas décadas, dada a vasta aplicabilidade de tais sistemas como modelagem de sistemas físicos e a alteração de ganhos de realimentação para, por exemplo, Sistemas Lineares (SLs) (Liberzon, 2003).

Dentre os SCs, muita ênfase é dada aos Sistemas Chaveados Lineares (SCLs), dos quais já se tem muitos resultados, recentemente sumarizados por Lin and Antsaklis (2009).

Os conversores CC-CC são aplicações naturais da teoria de SCs, tendo já sido abordados por Cardim et al. (2009) e por Deaecto et al. (2010). Na última, foi feita uma abordagem a esses dispositivos modelando-os como Sistemas Chaveados Afins (SCAs). Para esses conversores, há de se notar a importância em eliminar sensores, em parti-

cular o de corrente no indutor que apresenta diversos inconvenientes. Para isto, uma proposta foi feita por Midya et al. (2001).

Um projeto de observadores utilizando a teoria de SCAs foi feito por Yoshimura et al. (2012), tal observador foi denominado Observador de Luenberger Chaveado (OLC) e apresentou bom desempenho. Ainda, foi mostrado por Yoshimura et al. (2013) que tal observador também se presta para o controle em malha fechada, criando assim uma lei de chaveamento dinamicamente dependente da saída.

O projeto com uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) foi a abordagem usada para o desenvolvimento da teoria do OLC nesses trabalhos. Entretanto, algumas técnicas ainda não foram completamente exploradas, sobretudo para o problema da estimação de estado em SCAs. Destacam-se a relaxação da busca de uma taxa

de convergência garantida para o erro de estimação e a redução das normas das matrizes de ganho de saída usando, por exemplo as ideias propostas por Buzachero et al. (2012).

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 define os SCAs e mostra alguns resultados anteriores; a Seção 3 desenvolve os principais resultados: relaxação das LMIs para a busca de uma taxa de convergência garantida do estimador de estado e a inserção da norma de Frobenius; a Seção 4 valida os resultados propostos, através de simulações em conversores CC-CC; finalmente, a Seção 5 apresenta as conclusões deste estudo.

### Notação

Transposições são indicadas por um apóstrofo;  $\mathbf{0}$  é o vetor ou matriz nula com dimensões adequadas; o conjunto dos primeiros  $N$  números naturais estritos é representado por  $\mathbb{N}_N$ ; o hiper-octante de coordenadas não-negativas no espaço vetorial real  $N$ -dimensional é representado por  $\mathbb{R}_+^N$ ; o conjunto simplex unitário  $N$ -dimensional é representado por  $\Phi(N) = \{\varphi \in \mathbb{R}_+^N / \|\varphi\|_1 = 1\}$ ;  $\mathbf{A}_\varphi$  é uma combinação convexa de matrizes  $\mathbf{A}_i$  usando, respectivamente, os elementos de  $\varphi \in \Phi(N)$ ; o conjunto das matrizes  $n$ -dimensionais positivas definidas é representado por  $\mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$ ; um bloco adequado para simetria de matrizes é representado por  $\star$ ;  $\mathfrak{S}$  é o operador de simetria matricial por adição, ou seja,  $\mathfrak{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{X}'$ .

## 2 Preliminares

### 2.1 Sistemas Chaveados Afins

Um SCA  $N$ -modal,  $n$ -dimensional é descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{\sigma(\cdot)}\mathbf{x} + \mathbf{b}_{\sigma(\cdot)} \quad (1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{\sigma(\cdot)}\mathbf{x} \quad (1b)$$

onde  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  são o vetor de estado e o da sua derivada, respectivamente;  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  é a saída medida. Cada tripla  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{C}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i \in \mathbb{N}_N$  é dita um modo do sistema. A lei de chaveamento,  $\sigma(\cdot)$ , é uma função cujo contra-domínio é  $\mathbb{N}_N$  e, portanto, presta-se à escolha do modo ativo. Observe que, se  $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_N$ , então o sistema é um SCL; além disto, se  $N = 1$ , é um SL.

Finalmente, e sem perda de generalidade, pode-se assumir  $\text{rank}(\mathbf{C}_i) = m \leq n$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_N$  (Yoshimura et al., 2013).

Leis de chaveamento para SCAs, com procedimentos LMI de projeto, foram propostas por Trofino et al. (2009) e por Deaecto et al. (2010). Uma dessas leis está no Teorema 1.

**Teorema 1 (Deaecto et al. (2010))** *Sejam* (1) *um SCA e*  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ . *Se*  $\exists \varphi \in \Phi(N)$  *e*  $\exists \mathbf{P} \in \mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$ , *tais que* (2) *valha, então a lei de*

*chaveamento dependente de estados* (3) *faz*  $\tilde{\mathbf{x}}$  *ser global e assintoticamente estável (GAE).*

$$\mathfrak{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_i) + \mathbf{C}_i' \mathbf{C}_i \prec 0 \quad (2a)$$

$$\mathbf{A}_\varphi \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_\varphi = \mathbf{0} \quad (2b)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})' \mathbf{P} [\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_i] \quad (3)$$

### 2.2 O Observador de Luenberger Chaveado

O OLC, uma modificação do observador proposto por Luenberger (1971), foi proposto por Yoshimura et al. (2013) e consiste de matrizes modais de ganho da saída,  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , e de uma lei de chaveamento do observador,  $\hat{\sigma}$ , obedecendo à equação diferencial

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_{\hat{\sigma}(\cdot)} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_{\hat{\sigma}(\cdot)} + \mathbf{L}_{\hat{\sigma}(\cdot)} (\mathbf{C}_{\hat{\sigma}(\cdot)} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (4)$$

Assim, Yoshimura et al. (2013) mostraram que o erro de estimação do sistema é dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_{\sigma(\mathbf{x})} + \mathbf{L}_{\sigma(\mathbf{x})} \mathbf{C}_{\sigma(\mathbf{x})}) (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \quad (5)$$

se  $\hat{\sigma}(\cdot) = \sigma(\cdot)$ .

Com a definição do OLC, dada em (4), e com a imposição da mesma lei de chaveamento para o sistema principal e o de estimação de estado, obtém-se o Teorema 2, o qual ainda garante uma taxa de convergência para o erro de estimação (5).

### Teorema 2 (Yoshimura et al. (2013))

*Sejam* (1) *um SCA e*  $\Gamma > 0$ . *Se*  $\exists \mathbf{P} \in \mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$  *and*  $\exists \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N \in \mathbb{R}^{n \times m}$  *tais que* (6) *valha, então existe um OLC onde a origem em* (5) *é global e exponencialmente estável (GEE) sob chaveamento arbitrário com taxa de convergência garantida*  $\Gamma$ . *Além disto,* (7) *fornece um conjunto de matrizes de ganho da saída para um tal observador.*

$$\mathfrak{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}_i + \mathbf{W}_i \mathbf{C}_i) + \Gamma \mathbf{P} \prec 0, \forall i \in \mathbb{N}_N \quad (6)$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

Com o Lema da Projeção Recíproca (LPR), proposto por Apkarian et al. (2001), tem-se uma primeira tentativa em relaxar a LMI para a taxa de convergência. Este importante resultado está no Lemma 3 e tal tentativa de relaxação está no Teorema 4.

### Lema 3 (Apkarian et al. (2001))

*Sejam*  $\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ . *Então:*

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathfrak{S}(\mathbf{P}\mathbf{A}) & \star \\ \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{array} \right] \prec 0 \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc} -\mathfrak{S}(\mathbf{V}) & \star & \star \\ \mathbf{A}'\mathbf{V} + \mathbf{P} & -\mathbf{P} & \star \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{array} \right] \prec 0$$

**Teorema 4 (Yoshimura et al. (2013))**

Sejam (1) um SCA e  $\gamma > 0$ . Se  $\exists \mathbf{P} \in \mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$ ,  $\exists \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\exists \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que (8) valha,  $\forall i \in \mathbb{N}_N$ , então existe um OLC onde a origem em (5) é GEE com  $\hat{\sigma}(\cdot) = \sigma(\cdot)$  e taxa de convergência garantida  $2\gamma$ . Além disto, (9) fornece um conjunto de matrizes de ganho da saída para um tal observador.

$$\begin{bmatrix} -\mathfrak{G}(\mathbf{V}_i) & \star & \star \\ (\mathbf{A}_i + \gamma \mathbf{I})\mathbf{V}_i + \mathbf{C}_i'\mathbf{W}_i + \mathbf{P} & -\mathbf{P} & \star \\ \mathbf{V}_i & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_i = (\mathbf{W}_i \mathbf{V}_i^{-1})', i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

### 3 Resultados Principais

#### 3.1 Relaxação da Taxa de Convergência Garantida

Um dos métodos mais amplamente utilizados para relaxar LMIs é o conhecido Lema de Finsler (Finsler, 1936), o que se deve ao fato de ele possibilitar a inserção de variáveis livres ao problema (Boyd et al., 1994). Este importante resultado está no Lema 5.

**Lema 5 (Finsler (1936))** Sejam  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{v \times p}$ , com  $\text{rank}(\mathbf{R}) < p$  e  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p \times v}$ , tais que  $\mathbf{R}\mathbf{S} = \mathbf{0}$ . As afirmações seguintes são equivalentes:

- i)  $\mathbf{w}'\mathbf{Q}\mathbf{w} < 0, \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$ , tal que  $\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ;
- ii)  $\mathbf{S}'\mathbf{Q}\mathbf{S} \prec 0$ ;
- iii)  $\exists \mu \in \mathbb{R}$ , tal que  $\mathbf{Q} - \mu \mathbf{R}'\mathbf{R} \prec 0$ ;
- iv)  $\exists \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times v}$ , tal que  $\mathbf{Q} + \mathbf{X}\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{X}' \prec 0$ ;

A partir do Lema de Finsler, obtém-se condições, ou seja LMIs, equivalentes àquelas do Teorema 2. Estas encontram-se no Teorema 6.

**Teorema 6** Sejam (1) um SCA e  $\alpha, \Gamma > 0$ . As afirmações seguintes são equivalentes entre si e ao Teorema 2:

- i) Se  $\exists \mathbf{P} \in \mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$ ,  $\exists \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\exists \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_N \in \mathbb{R}^{2n \times n}$  tais que (10) valha,  $\forall i \in \mathbb{N}_N$ , então existe um OLC onde a origem em (5) é GEE com  $\hat{\sigma}(\cdot) = \sigma(\cdot)$  e taxa de convergência garantida  $\Gamma$ . Além disto, (7) fornece um conjunto de matrizes de ganho da saída para um tal observador.
- ii) Se  $\exists \mathbf{P} \in \mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$ ,  $\exists \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , todas não-singulares, e  $\exists \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tais que (11) valha,  $\forall i \in \mathbb{N}_N$ , então existe um OLC onde a origem em (5) é GEE com  $\hat{\sigma}(\cdot) = \sigma(\cdot)$  e com taxa de convergência garantida  $\Gamma$ . Além disto, (12) fornece um conjunto de matrizes de ganho da saída para um tal observador.

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}(\mathbf{W}_i \mathbf{C}_i) + \Gamma \mathbf{P} & \star \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathfrak{G}(\mathbf{Z}_i [\mathbf{A}_i \quad -\mathbf{I}]) \prec 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}(\mathbf{Z}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{W}_i \mathbf{C}_i) + \Gamma \mathbf{P} & \star \\ \mathbf{P} + (\alpha \mathbf{A}_i - \mathbf{I})'\mathbf{Z}_i' + \alpha \mathbf{C}_i'\mathbf{W}_i' & -\alpha \mathfrak{G}(\mathbf{Z}_i) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{Z}_i^{-1} \mathbf{W}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

**Prova:** A prova será feita a partir do Teorema 2:

- i) Formas (ii) e (iv) do Lema de Finsler serão aplicados. Agora, é suficiente observar que as matrizes adequadas são:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{G}(\mathbf{W}_i \mathbf{C}_i) + \Gamma \mathbf{P} & \star \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{A}_i \quad -\mathbf{I}]$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_i']'$$

- ii) Na forma (i) do Lema de Finsler, observe que o Teorema 2 pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \hat{\dot{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \mathbf{P} & \star \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \hat{\dot{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}} < 0$$

Reescrevendo (5), a segunda equação da forma (i) é obtida:

$$\underbrace{[\mathbf{A}_i + \mathbf{L}_i \mathbf{C}_i \quad -\mathbf{I}]}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \\ \hat{\dot{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

O usar a forma (iv), uma restrição sobre a matriz  $\mathbf{X}$  deve ser imposta para garantir a existência das matrizes de ganho da saída  $\mathbf{L}$  (vide (Pipeleers et al., 2009) para mais detalhes sobre esta técnica):

$$\mathbf{X}' = [\mathbf{Z}' \quad \alpha \mathbf{Z}']$$

Com isto, o resultado desejado é obtido. □

#### 3.2 Inserção da Norma de Frobenius

Um problema muito comum ao projetar matrizes de ganho são os altos valores absolutos que os elementos dessas matrizes podem assumir. Uma forma de minimizá-los é através da chamada norma de Frobenius, a qual, para  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , é definida como

$$\|\mathbf{X}\|_F^2 = \text{Tr}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 \quad (13)$$

De (13), é imediato verificar que  $\|\mathbf{X}'\|_F^2 = \|\mathbf{X}\|_F^2 \geq \max x_{ij}^2$ , o que resolve o problema dos

valores excessivamente altos ou baixos dos elementos. Portanto, ao estabelecer um limitante superior para a norma de Frobenius (o qual, neste estudo, será igual a  $m\beta$ , como será visto), impõe-se o mesmo limitante para todos os elementos de  $\mathbf{X}$ , ainda que este procedimento possa ser conservador.

Alguns procedimentos podem ser encontrados na literatura, utilizando formulações LMIs (Boyd et al., 1994)(Assunção et al., 2007). Uma proposta LMI é aqui feita no Teorema 7.

**Teorema 7** *Sejam  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$  e  $\beta > 0$ . Se (14) vale, então:*

- i)  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_{>0}^{n \times n}$ ;
- ii)  $\|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U}\|_F^2 < m\beta$ .

$$\begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} & \star & \star \\ \mathbf{U} & \mathbf{Y} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y} - \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (14)$$

**Prova:** Observe que, do complemento de Schur aplicado a (14),  $\mathbf{Y} \succ \mathbf{I} > 0$ . Além disto:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} - \mathbf{I} \succ 0 &\Rightarrow \mathbf{Y}^{-1} \succ \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}^{-1} \\ &\Rightarrow \mathbf{U}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U} \succ \mathbf{U}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U} \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando novamente o complemento de Schur:

$$\begin{aligned} \beta\mathbf{I} \succ \mathbf{U}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U} &\Rightarrow \mathbf{U}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U} - \beta\mathbf{I} \prec 0 \\ &\Rightarrow \text{Tr}(\mathbf{U}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U} - \beta\mathbf{I}) < 0 \end{aligned}$$

Dado que o traço é linear:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U}\|_F^2 &= \text{Tr}(\mathbf{U}'\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U}) \\ &< \text{Tr}(\beta\mathbf{I}) = \beta \text{Tr}(\mathbf{I}) = m\beta \end{aligned}$$

□

O Teorema 7 aplica-se bem aos SCAs, com as escolhas:

- $\mathbf{Y} = \mathbf{P}$  e  $\mathbf{U}_i = \mathbf{W}_i$  para o Teorema 2 e o Teorema 6 (i);
- $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Z}_i$  e  $\mathbf{U}_i = \mathbf{W}_i$  para o Teorema 6 (ii);
- $\mathbf{Y}_i = \mathbf{V}_i'$  e  $\mathbf{U}_i = \mathbf{W}_i'$  para o Teorema 4.

Um pequeno inconveniente para os dois últimos casos é que  $\mathbf{V}_i$  e  $\mathbf{Z}_i$  aparecem na diagonal principal de (14). Assim, estas matrizes são forçadas a ser simétricas, perdendo um pouco da relaxação vinda da aplicação do LPR ou do Lema de Finsler. No primeiro caso, a matriz  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}$  não pode ser modal, o que também pode vir a reduzir a factibilidade das LMIs.

Uma observação adicional é que, em SCAs, as variáveis  $\beta$  são modais, ou seja, há um  $\beta_i$  para cada modo do sistema. Desta forma, a função objetivo da LMI pode ser a minimização de  $\beta$  para uma norma de Frobenius garantida comum (útil se o conservadorismo for excessivo) ou  $\sum_{i=1}^N \beta_i$  (reduzindo mais ainda a norma de Frobenius).

## 4 Exemplos de Projeto em Conversores CC-CC

### 4.1 Conversores CC-CC

Os conversores CC-CC básicos são aplicações imediatas da teoria de SCAs. Além disto, apesar de serem sistemas bidimensionais, apenas a tensão de saída está disponível na maioria dos casos. Isto deve-se ao alto custo de sensores de corrente (sensores de efeito Hall), inconveniência na montagem ou sua fragilidade (como no caso de resistores shunt). Portanto, estes circuitos são exemplos adequados para o estudo aqui desenvolvido.

As matrizes para os conversores CC-CC estão em (15), onde o vetor de estado é  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]'$  =  $[i_l \ v_c]'$ . As matrizes para cada modo e conversor estão na Tabela 1.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad (15a)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{L} & 0 \end{bmatrix}' \quad \mathbf{B}_2 = [0 \ 0]' \quad (15b)$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = [0 \ 1] \quad (15c)$$

Tabela 1: Pares modais de matrizes para os conversores CC-CC.

	Transistor on ( $\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1$ )	Transistor off ( $\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2$ )
Buck	$(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1)$	$(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$
Boost	$(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$	$(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1)$
Buck-boost	$(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1)$	$(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$

Os parâmetros a serem usados em todos os projetos foram tomados de Deaecto et al. (2010):  $V_{in} = 100\text{V}$ ,  $L = 500\mu\text{H}$ ,  $C = 470\mu\text{F}$ ,  $r = 2\Omega$  e  $R = 50\Omega$ . Finalmente, o MATLAB<sup>®</sup> é usado: para o projeto, o LMILab<sup>®</sup> e, para as simulações, o comando ODE45 com um passo de cálculo máximo de  $1\mu\text{s}$ .

### 4.2 Conversor Buck

Para o conversor buck, observe que as matrizes  $\mathbf{A}$  são iguais, assim há apenas uma matriz de ganho da saída, a qual, com o Teorema 2 e taxa de convergência garantida de  $\Gamma = 10^4$ , é

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -1.069 \\ -5.959 \end{bmatrix} \times 10^3$$

Reprojetando essa matriz com o Teorema 2 simultaneamente com o Teorema 7 e impondo  $\beta = 100$  como um limitante para a norma de Frobenius, obtem-se

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -0.5659 \\ 1.4823 \end{bmatrix}$$

Para a simulação, será aplicada a matriz  $\mathbf{P}$  para a lei de chaveamento dependente de estados (3), dada por Deaecto et al. (2010):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.857 & 0.6401 \\ 0.6401 & 1.242 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

Além disto, o ponto de operação escolhido é  $\tilde{\mathbf{x}} = [1 \ 50]'$  e, para provocar uma diferença entre o estado real e o estimado, o estado inicial aumentado é posto em  $\mathbf{x}_0 = [0.1 \ 20 \ 0 \ 0]'$ . O tempo de simulação é de 40ms, com passo de cálculo máximo de  $1\mu s$ . Os resultados estão na Figura 1.

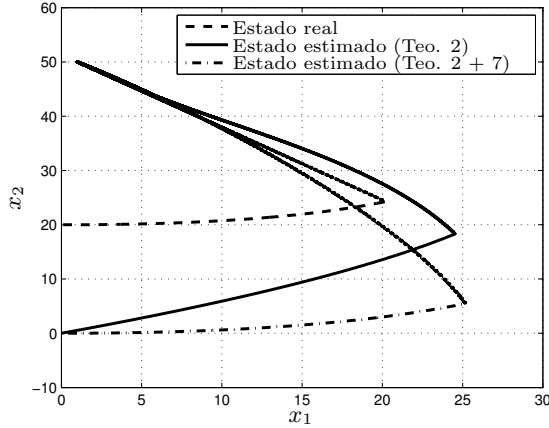


Figura 1: Resultados de simulação para o conversor buck.

O uso combinado do Teorema 2 com o Teorema 7 trouxe como benefício a redução dos elementos da matriz de ganho de saída, sem contudo afetar a estimação de estado, o que era o resultado desejado. Dado que o valor da taxa de convergência garantida era suficientemente alto, não se buscou a melhoria desse parâmetro de projeto.

### 4.3 Conversor Buck-Boost

Neste conversor, tanto com o uso do Teorema 2, quanto com o uso do Teorema 4, não é possível obter taxa de convergência acima de  $\Gamma = 8000$ , pois as LMIs se mostram ineficazes. Assim, neste novo projeto, precisa-se aumentar este parâmetro, bem como reduzir a norma de Frobenius das matrizes de ganho da saída. Note que isto é mais difícil que no projeto anterior, já que os modos do conversor têm matrizes  $\mathbf{A}$  distintas.

Ao usar o Teorema 2, com  $\Gamma = 7950$ , o resultado obtido foi

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3933 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -1.0234 \\ -0.0393 \end{bmatrix} \times 10^5$$

Para o novo projeto, será utilizado o Teorema 6, item ii, com  $\alpha = 1$  e  $\Gamma = 15000$ . Este teorema, vindo do Lema de Finsler, possibilita aumentar além deste valor a taxa de convergência garantida.

Ainda, será feita a combinação com o Teorema 7, onde houve a necessidade de impor  $\beta > 500$ , ou os valores dos elementos das matrizes  $\mathbf{L}$  tornariam-se muito pequenos. Com estas escolhas, as matrizes de ganho da saída obtidas foram

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -10,5375 \\ -1,6637 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0,558 \\ 0,6834 \end{bmatrix}$$

Para as simulações, a matriz  $\mathbf{P}$  para a lei de chaveamento (3) é:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2.863 & 0.5556 \\ 0.5556 & 4.9378 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Os resultados de simulação estão na Figura 2, onde o ponto de operação escolhido é  $\tilde{\mathbf{x}} = [6 \ 120]'$ . Todos os demais parâmetros serão mantidos.

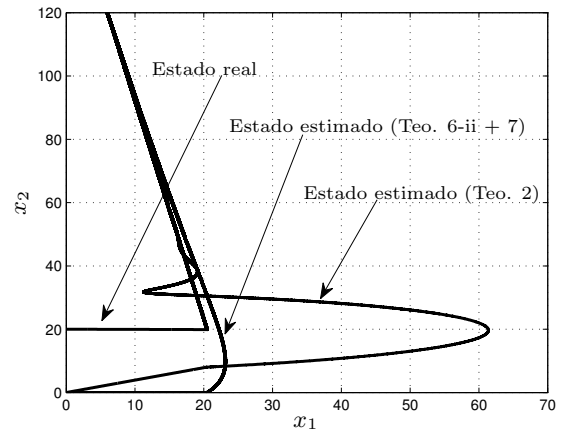


Figura 2: Resultados de simulação para o conversor buck-boost.

A simulação mostra uma grande redução do sobressinal da estimação de estado, devido ao acréscimo da taxa de convergência de  $\Gamma = 7950$  para  $\Gamma = 15000$ , caindo de cerca de 60A para cerca de 25A, o que mostra a eficiência do método. Ainda, os valores dos elementos das matrizes de ganho da saída são bastante reduzidos em comparação com os valores anteriormente encontrados.

## 5 Conclusões

Este trabalho propôs, para o OLC em SCAs, uma relaxação às LMIs para busca de uma taxa de convergência garantida e também LMIs para a inserção de uma limitação para a norma de Frobenius das matrizes de ganho da saída.

A aplicação aos conversores CC-CC das LMIs encontradas mostrou-se muito satisfatória, já que, onde foi necessário, a taxa de convergência garantida foi muito aumentada, enquanto a norma de Frobenius reduziu-se a valores muito menores do que os anteriormente encontrados.

Uma limitação para o uso conjunto dessas técnicas foi apontada: as matrizes com variáveis de folga devem tornar-se simétricas, por aparecerem na diagonal da matriz para limitação de norma. Entretanto, esta limitação não se mostrou um obstáculo para os projetos propostos.

Um ponto para pesquisas futuras é a busca de uma LMI para limitação de norma que retire a matriz de variáveis de folga de sua diagonal principal.

### Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), projeto 2011/17610-0, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por financiarem este estudo.

### Referências

- Apkarian, P., Tuan, H. D. and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigensubstructure assignment, and  $\mathcal{H}_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12): 1941 – 1946.
- Assunção, E., Teixeira, M. C. M., Faria, F. A., da Silva, N. A. P. and Cardim, R. (2007). Robust state-derivative feedback lmi-based designs for multivariable linear systems, *International Journal of Control* **80**(8): 1260 – 1270.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, 15, 2 edn, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.
- Buzachero, L. F. S., Assunção, E., Teixeira, M. C. M. and da Silva, E. R. P. (2012). *Advanced Control Systems*, InTech, Rijeka, chapter New Techniques for Optimizing the Norm of Robust Controllers of Polytopic Uncertain Linear Systems, pp. 75–100.
- Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Covacic, M. R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a dc-dc power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(9): 3505 – 3513.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. S. and Pomílio, J. A. (2010). Switched affine systems control design with application to dc-dc converters, *IET Control Theory and Applications* **4**(7): 1201 – 1210.
- Finsler, P. (1936). Über das vorkommen definit und semidefiniten formen in scharen quadratischer formen, *Commentarii Mathematici Helvetici* **9**: 188 – 192.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Systems and Control: Foundations and Applications, 1 edn, Birkhäuser, Boston.
- Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(2): 308 – 322.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers, *IEEE Transactions on Automatic Control* **16**(6): 596 – 602.
- Midya, P., Krein, P. T. and Greuel, M. F. (2001). Sensorless current mode control-an observer-based technique for dc-dc converters, *IEEE Transactions on Power Electronics* **16**(4): 522–526.
- Pipeleers, G., Demeulenaere, B., Swevers, J. and Vandenberghe, L. (2009). Extended lmi characterizations for stability and performance of linear systems, *Systems & Control Letters* **58**(7): 510 – 518.
- Trofino, A., Assmann, D., Scharlau, C. C. and Coutinho, D. F. (2009). Switching rule design for switched dynamic systems with affine vector fields, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(9): 2215 – 2222.
- Yoshimura, V. L., Assunção, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Júnior, E. I. (2012). Observação de estados em sistemas chaveados afins e projeto de observadores em conversores cc-cc, *CBA 2012*, Campina Grande, PB.
- Yoshimura, V. L., Assunção, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Júnior, E. I. (2013). Observer-based control design for switched affine systems and applications to dc-dc converters, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **24**(4): 535–543.