

# CONTROLE ÓTIMO COM CONDIÇÃO INICIAL INTERVALAR

ULCILEA A. SEVERINO LEAL\*, GERALDO NUNES SILVA†, WELDON A. LODWICK‡

\* *Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS*  
*Campus de Chapadão do Sul*  
*Chapadão do Sul, MS, Brasil*

† *Universidade Estadual de São Paulo - UNESP/IBILCE*  
*Departamento de Matemática Aplicada*  
*São José do Rio Preto, SP, Brasil*

‡ *University of Colorado Denver*  
*Department of Mathematics*  
*Denver, Colorado, USA*

Emails: [ulcilea.leal@ufms.br](mailto:ulcilea.leal@ufms.br), [gsilva@ibilce.unesp.br](mailto:gsilva@ibilce.unesp.br), [Weldon.Lodwick@ucdenver.edu](mailto:Weldon.Lodwick@ucdenver.edu)

**Abstract**— In this work will be presented an approach to solve linear quadratic optimal control whose initial condition has unrestrained uncertainty of interval type. For this purpose, use shall be made of the concept of integral equation and an example will be developed to illustrate this technique.

**Keywords**— optimal control, interval initial condition

**Resumo**— Neste trabalho será apresentado uma abordagem para resolver problemas de controle ótimo quadrático linear irrestrito cuja condição inicial possui incerteza do tipo intervalar. Para tal propósito, utilizar-se-á o conceito de equação integral e um exemplo será desenvolvido visando exemplificar essa técnica.

**Keywords**— controle ótimo, condição inicial intervalar.

## 1 Introdução

Os problemas de controle ótimo originaram-se da teoria do cálculo variacional por volta de 1965. Bellman (1957) e Pontryagin et al. (1965) foram grandes contribuintes para o desenvolvimento desta teoria. A teoria de controle ótimo está presente na modelagem de diversos tipos de problemas, por exemplos, físicos, biológicos, da área econômica e produtiva entre outros (Kennedy, 1986; Cacho, 1999; Campo et al., 2006).

Os problemas de controle ótimo podem ser representados de várias formas, no presente texto será considerado a classe dos problemas de controle ótimo quadrático linear irrestrito. Em geral, esses problemas são oriundos da modelagem de situações reais envolvendo incerteza, por exemplo, na falta de informações do problema, na natureza e na modelagem do mesmo. Visando descrever tais situações, este artigo considerará a seguinte situação, os problemas quadrático linear irrestrito que possui incerteza do tipo intervalar na condição inicial.

O processo de resolução deste problema será dado em duas etapas: a primeira etapa consiste em transformar o problema original em uma equação integral, segundo Lodwick (1980) e posteriormente, o problema resultante será transformado num sistema linear intervalar através de técnica de discretização.

A equação integral obtida na primeira etapa, é dada em função do kernel que é contínuo no intervalo  $[0, 1] \times [0, 1]$ , assim, utilizando o conceito

de partição de intervalo, essa será transformada em um sistema linear intervalar, uma vez que a condição inicial é um intervalo. Contudo, para resolver o sistema linear intervalar utilizar-se-á a aritmética intervalar restrita proposta por Lodwick (1999). Neste contexto, os intervalos são redefinidos como funções lineares de domínio compacto e inclinação não-negativa.

Segue abaixo, algumas notações úteis para a compreensão do texto.

### Notações:

$x^T(t)$  : transposto do vetor  $x(t)$ .

$x'(t) = \frac{dx}{dt}$ .

$x^I$  : intervalo  $[\underline{x}, \bar{x}]$ .

$\tilde{x}^I$  : intervalo result. da metodologia.

$\tilde{x}$  : intervalo transf. pela aritmética restrita.

## 2 Problema de controle ótimo

Considere a classe particular do problema de controle ótimo, o problema quadrático linear irrestrito:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \int_0^1 [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \\ \text{sujeito a} \quad & : \\ & x'(u; t) = A_{n \times n}x(t) + B_{n \times m}u(t) \\ & x(u; 0) = x_0, \end{aligned}$$

onde:  $u(t)$  é a função de controle,  $x(t)$  é a função que representa o estado do sistema,  $Q$  é uma matriz simétrica positiva definida e  $R$  é inversível simétrica e semi-positiva definida.

Aplicando a teoria do princípio do máximo de Pontryagin para esse problema e fazendo algumas manipulações algébricas (ver Lodwick (1980)), obtém-se a seguinte equação integral:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^1 K(r,t)x(r)dr, \quad (1)$$

com

$$K(r,t) = \begin{cases} k_1(r,t) & \text{para } 0 \leq r \leq t \leq 1 \\ k_2(r,t) & \text{para } 0 \leq t < r \leq 1 \end{cases},$$

e

$$\begin{aligned} k_1(r,t) &= - \int_0^r e^{A(t-s)} BR^{-1}B^T e^{-A^T(s-r)} Q ds \\ k_2(r,t) &= - \int_0^t e^{A(t-s)} BR^{-1}B^T e^{-A^T(s-r)} Q ds \end{aligned}.$$

A equação integral apresentada em (1) é uma equação do tipo Fredholm, e a função kernel  $K(r,t)$  é contínua em  $[0,1] \times [0,1]$ . Assim, com o intuito de resolver tal equação, dado que  $K(r,t)$  é contínua, utilizar-se-á o conceito de integração numérica de Riemann, mais particularmente, os conceitos de partição de um intervalo e soma de Riemann.

Para tal propósito considere  $P_1 : 0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} < r_n = 1$  uma partição do intervalo  $[0,1]$ , que  $r$  está definido, onde:  $r_j = \frac{j}{n}$  e  $\Delta r_j = \frac{1}{n}$ , para  $j = 0, 1, \dots, n$ . Logo, a equação (1) será reescrita da seguinte forma:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \sum_{j=0}^n K\left(\frac{j}{n}, t\right)x\left(\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}. \quad (2)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para  $t$  em  $[0,1]$ , considere agora  $P_2 : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  uma partição do intervalo  $[0,1]$  referente à  $t$ , onde:  $t_i = \frac{i}{n}$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ , uma vez que  $K\left(\frac{j}{n}, t\right)$  está definida em  $[0,1]$ . Portanto, a equação (2) será reescrita por:

$$x\left(\frac{i}{n}\right) = e^{A\left(\frac{i}{n}\right)}x_0 + \sum_{j=0}^n K\left(\frac{j}{n}, \frac{i}{n}\right)x\left(\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Fazendo  $i$  e  $j$  variarem de  $0, 1, \dots, n$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} x(0) &= e^{A(0)}x_0 + K(0,0)x(0)\frac{1}{n} + K\left(\frac{1}{n}, 0\right)x\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &\quad + \dots + K(1,0)x(1)\frac{1}{n}, \\ x\left(\frac{1}{n}\right) &= e^{A\left(\frac{1}{n}\right)}x_0 + K(0, \frac{1}{n})x(0)\frac{1}{n} + K\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &\quad x\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + \dots + K(1, \frac{1}{n})x(1)\frac{1}{n}, \\ &\quad \vdots \\ x(1) &= e^{A(1)}x_0 + K(0,1)x(0)\frac{1}{n} + K\left(\frac{1}{n}, 1\right)x\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &\quad + \dots + K(1,1)x(1)\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

O sistema apresentado anteriormente pode ser reescrito na forma de matriz, e conseqüentemente, com essa técnica ao invés de resolver a equação integral (1), tem-se que resolver um sistemas linear, cuja a solução é uma aproximação do resultado desejado.

O sistema linear apresentado acima será denotado por:  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ , onde  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{x}$  e  $\tilde{b}$  são matrizes obtidas no desenvolvimento anterior. Destacando-se o fato que a condição inicial,  $x_0$ , está presente apenas no vetor  $\tilde{b}$ .

O problema de controle ótimo que será considerado é do tipo intervalar, onde a incerteza intervalar está presente na condição inicial, ou seja:  $x_0^I = [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ . Assim, dado o sistema linear anterior e considerando que a condição inicial é intervalar, tem-se o seguinte sistema linear intervalar resultante:

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}^I, \quad \text{onde } \tilde{b}^I = \begin{pmatrix} e^{A(0)}[\underline{x}_0, \overline{x}_0] \\ e^{A\left(\frac{1}{n}\right)}[\underline{x}_0, \overline{x}_0] \\ \vdots \\ e^{A(1)}[\underline{x}_0, \overline{x}_0] \end{pmatrix}, \quad (3)$$

sendo que,  $\tilde{A}$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} (1 - K(0,0))\frac{1}{n} & -K\left(\frac{1}{n}, 0\right)\frac{1}{n} & \dots & -K(1,0)\frac{1}{n} \\ -K(0, \frac{1}{n})\frac{1}{n} & (1 - K\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right))\frac{1}{n} & \dots & -K(1, \frac{1}{n})\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K(0,1)\frac{1}{n} & -K\left(\frac{1}{n}, 1\right)\frac{1}{n} & \dots & (1 - K(1,1))\frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Como o sistema (3) é um sistema intervalar, pois o vetor  $\tilde{b}^I$  é composto por intervalos, para resolver utilizar-se-á o conceito da aritmética intervalar restrita porposta por Lodwick (1999). Tal abordagem, ao contrário da aritmética intervalar tem inverso aditivo, inverso multiplicativo e satisfaz a lei da distributiva. Neste contexto, os intervalos são redefinidos como funções lineares, e os espaços dos intervalos serão transformados nos espaços das funções lineares com domínio compacto e inclinação não-negativa.

### 3 Aritmética Intervalar Restrita

Essa abordagem é uma extensão da aritmética intervalar, no sentido da dependência, ou seja, se cada intervalo na expressão aritmética é independente, as regras usuais para aritmética intervalar se mantém (ver (Moore and Kearfott, 2009)), caso contrário, esta abordagem apresenta uma metodologia para obter os resultados.

**Definição:** Um número intervalar  $\tilde{x}^I = [\underline{x}, \overline{x}]$  é dado da seguinte forma

$$\tilde{x}^I = \{x | x = \underline{x} + (\overline{x} - \underline{x})\lambda \text{ onde, } 0 \leq \lambda \leq 1\}. \quad (4)$$

Os três parâmetros  $\underline{x}$ ,  $\overline{x}$  e  $\lambda$  são necessários para lidar com a dependência. Estritamente falando, em (4), os números  $\underline{x}$  e  $\overline{x}$  são dados e são considerados como parâmetros, enquanto que  $\lambda$  é

a variável, que é restrita entre 0 e 1. Ou seja,  $x$  é uma função de  $\lambda$ , com parâmetros  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$ .

Neste contexto, as operações algébricas são definidas da seguinte forma, sejam  $\tilde{x}^I = [\underline{x}, \bar{x}]$  e  $\tilde{y}^I = [\underline{y}, \bar{y}]$  dois números intervalares, assim:

$$\begin{aligned}\tilde{z}^I &= \tilde{x} \circ \tilde{y} \\ &= \{z | z = x \circ y, \forall \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \text{ e } \underline{y} \leq y \leq \bar{y}\} \\ &= [\underline{z}, \bar{z}],\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\tilde{z}^I &= \tilde{x} \circ \tilde{x} \\ &= \{z | z = x \circ x, \forall \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} = [\underline{z}, \bar{z}],\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\underline{z} &= \min z, \quad \bar{z} = \max z \text{ e} \\ \circ &\in \{+, -, \times, \div\}.\end{aligned}$$

Desde que, todas as operações são contínuas, e contando que a divisão por zero é anulada, a minimização e maximização estão bem definidas, atingindo o resultado de  $\tilde{z}^I$  em termos de um intervalo.

Os cálculos para a minimizar e a maximizar estão associados com adição e subtração dos intervalos, levando em consideração a restrição de  $\lambda$  em  $0 \leq \lambda \leq 1$ , para cada um dos intervalos considerados ( $\lambda$  distintos para cada um dos números intervalares). Para maiores informações sobre a aritmética intervalar restritas, pode-se consultar Lodwick (1999).

Na próxima seção será apresentado um estudo de caso, um problema de controle ótimo quadrático linear com condição inicial intervalar.

#### 4 Uma Aplicação

Para ilustrar as metodológicas apresentadas anteriormente, considere o seguinte problema de controle ótimo quadrático linear com condição inicial intervalar:

$$\begin{aligned}\max & \quad -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt \\ \text{sujeito a} & \quad : \\ & x'(u; t) = u(t) \\ & \tilde{x}(u; 0) = [0, 1].\end{aligned} \quad (5)$$

Com o intuito de comparar os resultados obtido através da metodologia apresentada, primeiramente, será analisado um caso clássico do problema de controle ótimo em (5), será apresentada a resolução deste problema quando a condição inicial assume o valor real 1,  $x(0) = 1$ . Posteriormente, a solução para o problema quando a condição inicial é intervalar será obtida utilizando a metodologia apresentada neste trabalho.

1. Considerando o problema (5) com condição inicial não intervalar, o caso clássico para  $x(0) = 1$ .

A Hamiltoniana deste problema é a seguinte:

$$H(x, u, \lambda) = -\frac{1}{2} (x(t)^2 + u(t)^2) + \lambda(t)u(t),$$

onde:  $\lambda(t)$  é a variável de co-estado. Utilizando o Princípio do Máximo de Pontryagin, obtém-se as seguintes equações para o estado e o co-estado, com  $x(0) = 1$  e  $\lambda(1) = 0$ ,

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{1+e^2}e^t + \frac{e^2}{1+e^2}e^{-t}, \\ \lambda(t) &= \frac{1}{1+e^2}e^t - \frac{e^2}{1+e^2}e^{-t}.\end{aligned}$$

Na figura (1) apresenta-se o gráfico da equação de estado, cuja a equação foi apresentada anteriormente.

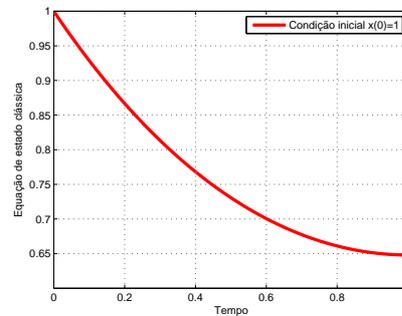


Figura 1: Equação de estado quando  $x(0) = 1$ .

2. Agora, considere o caso em que a condição inicial é intervalar,  $x(0) = [0, 1]$ .

Neste caso:

$$A = [0], B = [1], Q = -\left[\frac{1}{2}\right], R = -\left[\frac{1}{2}\right].$$

Utilizando o Princípio do Máximo de Pontryagin e a abordagem apresentada por Lodwick (1980), obtém-se:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{0 \cdot t}[0, 1] + \int_0^1 K(r, t)x(r)dr \\ &= [0, 1] + \int_0^1 K(r, t)x(r)dr,\end{aligned}$$

e

$$K(r, t) = \begin{cases} -r & \text{para } 0 \leq r \leq t \leq 1 \\ -t & \text{para } 0 \leq t < r \leq 1 \end{cases}.$$

Aplicando a metodologia apresentada anteriormente, a equação integral será transformada em um sistema linear intervalar (ver (3)). Assim, como a incerteza está presente

apenas na condição inicial do problema de controle ótimo, somente o vetor  $\tilde{b}^T$  será dado em função da condição inicial intervalar. Utilizando, a aritmética intervalar restrita no intervalo  $[0, 1]$ , obtém-se:

$$[0, 1] = \{x|x = \lambda, \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

contudo, o vetor  $\tilde{b}^T$  será transformado no vetor  $\tilde{b}$  dado em função de  $\lambda$ . Originando-se, num sistema linear clássico dado em função de  $\lambda$ , para  $\lambda \in [0, 1]$ . Para a resolução do sistema linear resultante utilizou-se o software MATLAB 7.9.

Inicialmente, apresentar-se-á a simulação quando  $n = 4$ , visando exemplificar detalhadamente a técnica utilizada, e posteriormente os resultados para valores de  $n$ , com  $n$  significativamente grande.

- Para  $n = 4$ , o sistema resultante, é o seguinte  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ , onde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.938 & 0.063 & 0.0623 & 0.063 \\ 0.063 & 0.875 & 0.125 & 0.125 \\ 0.063 & 0.125 & 0.813 & 0.188 \\ 0.063 & 0.125 & 0.188 & 0.750 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x(\frac{1}{4}) \\ x(\frac{2}{4}) \\ x(\frac{3}{4}) \\ x(1) \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix},$$

como  $0 \leq \lambda \leq 1$ , aplicando a aritmética intervalar restrita para resolver o sistema, obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{pmatrix} x(\frac{1}{4}) \\ x(\frac{2}{4}) \\ x(\frac{3}{4}) \\ x(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0, 0.8955] \\ [0, 0.8307] \\ [0, 0.8231] \\ [0, 0.9145] \end{pmatrix}.$$

Na figura (2) está apresentado a dinâmica dos intervalos, sendo que essa mostra os limites superiores de cada um dos intervalos em cada interação. Os limites inferiores são sempre zeros.

- Para o valor de  $n$  igual a 10, 20 e 100, o resultado está exposto na figura (3), onde pode-se observar que conforme os valores de  $n$  crescem os limites superiores dos intervalos vão se aproximando da solução clássica, conseqüentemente, a solução do sistema linear intervalar contém a solução clássica do problema. Ressaltando-se que na figura estão apresentados apenas os limites superiores das soluções intervalares, como os limites inferior são sempre nulos os mesmo não estão apresentados.
- Para valor de  $n$  igual a 1500, o resultado está apresentado na figura (4).

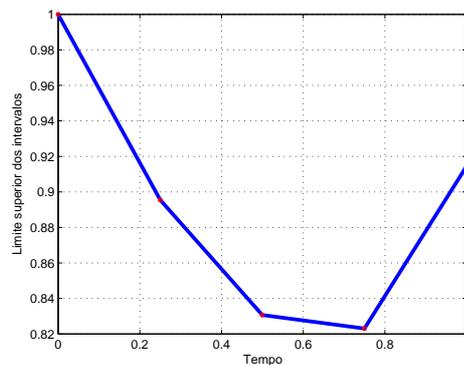


Figura 2: Resultado do sistema linear intervalar para  $n = 4$ .

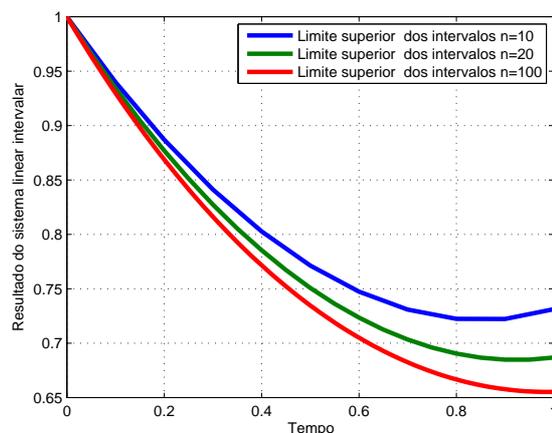


Figura 3: Resultado do sistema linear intervalar para vários valores de  $n$ .

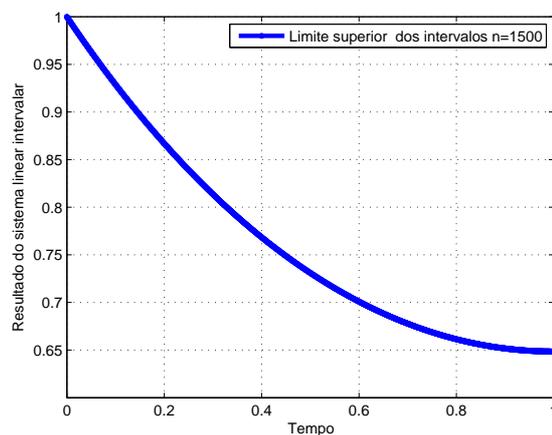


Figura 4: Resultado do sistema linear intervalar para  $n = 1500$ .

## 5 Conclusão

A técnica de transformar a equação integral intervalar em um sistema linear intervalar, resultou-se em um boa aproximação para a solução do problema. Tornando o processo de resolução bem

mais simples, uma vez que, ao invés de resolver uma integral, tem-se que resolver um sistema linear. Posteriormente, o nosso propósito é considerar esta abordagem para problemas com incerteza no modelo.

### Agradecimentos

A primeira autora agradece a FAPESP, pelo apoio financeiro, processo 2012/00189-3. O segundo autor agradece ao CNPq, pela bolsa produtividade, processo 395418/2009-2 e o terceiro autor agradece a FAPESP, pois durante a execução deste trabalho este autor foi bolsista visitante na UNESP, financiado pela FAPESP, processo 2011/13985-0.

### Referências

- Bellman, R. (1957). *Dymanic Programming*, Princeton University Press, Priceton, NJ.
- Cacho, O. J. (1999). Dynamic models, externalities and sustainability in agriculture, *Workshop Paper Series in Agricultural and Resource Economics*, pp. 1–9.
- Campo, J. R., Chela, R. S., Moraes, C. R. C. and Silva, G. N. (2006). Simulações da dinâmica populacional de plantas daninhas com aplicação de controle, *Anais do 5o Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Guaratinguetá, SP, p. CD Rom.
- Kennedy, J. O. S. (1986). *Dynamic Programming: Applications to Agriculture and Natural Resources*, Elsevier, New York, NY.
- Lodwick, W. A. (1980). Two numerical methods for the solutions of optimal control problems with computed error bounds using the maximum principle of pontryagin.
- Lodwick, W. A. (1999). Constrained interval arithmetic, *CCM Report* **138**.
- Moore, R. E. and Kearfott, M. J. C. (2009). *Introduction to interval analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. H., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F. (1965). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley, New York, NY.