

PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS DE ORDEM REDUZIDA PARA UMA CERTA CLASSE DE SISTEMAS MIMO

PEDRO B. FERNANDES, JORGE R. BRITO-DE-SOUZA

Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Pará

CEP: 66075-900 – Belém – PA

E-mails: pedro.bfer@gmail.com, jrgrbrito@ufpa.br

Abstract— This paper addresses the problem of designing reduced order LQG/LTR controllers projects for MIMO systems. The design model is a simplified and reduced order model of the plant to be controlled. The proposed approach explores some specific characteristics of those systems whose output signals are not directly dependent on certain non dominant modes of the system. An example for a sixth order unstable system with two inputs and two outputs is presented.

Keywords— LQG/LTR controllers, model reduction, dynamic compensators, loopshaping, multivariable systems.

Resumo— Este artigo aborda o problema do projeto de controladores do tipo LQG/LTR de ordem reduzida para sistemas MIMO. Na realização do projeto, utiliza-se um modelo simplificado e de ordem reduzida da planta a ser controlada. A metodologia apresentada explora algumas características específicas de certos sistemas cujas saídas não dependem diretamente de determinados modos não dominantes do sistema. Um problema ilustrativo envolvendo um sistema instável de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas, é apresentado.

Palavras-chave— Controladores LQG/LTR, redução de modelos, compensadores dinâmicos, loopshaping, sistemas multivariáveis.

1. Introdução

Desenvolvido por Doyle e Stein (1979), o método LQG/LTR tornou-se uma das mais conhecidas e/ou populares metodologias para a realização do projeto de controladores robustos para diversos tipos de sistemas lineares contínuos — SISO ou MIMO, MIMO quadrados ou não quadrados, estáveis ou instáveis, dentre outros. Na verdade, as únicas condicionantes de ordem geral que o método estabelece com relação ao sistema a ser controlado são as de que ele seja linear e de fase mínima.

Um controlador do tipo LQG/LTR é basicamente uma combinação de um regulador LQR e um filtro de Kalman e, por isso, em princípio, a ordem do controlador projetado é igual à ordem do sistema a ser controlado. Este fato constitui o grande destaque negativo dos controladores deste tipo.

O problema relacionado com a ordem elevada do controlador pode ficar ainda mais grave dependendo das características específicas do sistema a ser controlado. Isto porque o sucesso da aplicação do método no sentido da obtenção de um controlador com o melhor desempenho possível também pode depender de alguns acréscimos e/ou modificações no sistema (planta) a ser controlado. É o caso, por exemplo, da adição de integradores na entrada/saída da planta, que aumentam os ganhos principais do sistema nas baixas frequências e também possibilitam a equalização dos referidos ganhos (Cruz, 1996), o que é benéfico para o desacoplamento dos diversos canais do sistema, no caso de sistemas MIMO. Outra situação é a inclusão de compensadores dinâmicos para a estabilização prévia do sistema a ser controlado, no caso de plantas que possuem pólos instáveis próximos do eixo imaginário, conforme

relatado por Matos et al (2006). O acréscimo ao sistema desses elementos dinâmicos aumenta a sua ordem e, conseqüentemente, aumenta também a ordem do controlador projetado.

Uma solução para minimizar o problemático aumento, às vezes exagerado, da ordem dos controladores do tipo LQG/LTR, é tentar projetá-los fazendo uso de um modelo simplificado e de ordem reduzida da planta a ser controlada. Para a obtenção desses modelos pode-se utilizar os mais diversos métodos de redução de ordem disponíveis na literatura, tais como métodos de agregação, realização balanceada ou outro qualquer. Em geral, esses métodos possuem sofisticado embasamento teórico e/ou matemático e, quando aplicados, necessitam de significativo esforço computacional. Ademais, dependendo das características específicas de cada sistema, às vezes não se consegue uma redução significativa na ordem do modelo simplificado.

Este trabalho focaliza a questão do projeto de controladores do tipo LQG/LTR de ordem reduzida para certos sistemas do tipo MIMO cujas saídas não dependem diretamente de certas variáveis dinâmicas do sistema, as quais, por sua vez, são desacopladas entre si e também com relação às demais variáveis do sistema. Uma característica adicional dos sistemas considerados neste trabalho é que as suas variáveis que são desacopladas entre si e em relação às demais variáveis do sistema são associadas com os modos do sistema que são mais rápidos e não dominantes.

Sistemas com essas características são comuns em aplicações na área de sistemas aeroespaciais, como, por exemplo, no caso dos aviões do tipo F14 e Canard, respectivamente tratados por Banda e Ridgely (1986) e por Chiang e Safonov (1996).

Graças às suas características, esses sistemas permitem que a simplificação e redução de ordem de seus modelos sejam feitas de maneira bem imediata.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 2 descreve o sistema MIMO instável considerado e, em seguida desenvolve a simplificação de sua representação em espaço de estados. A Seção 3 apresenta o projeto de um com-pensador dinâmico de ordem reduzida que é usado para estabilizar o sistema a ser controlado. A Seção 4 mostra todos os detalhes do projeto do controlador do tipo LQG/LTR, feito com base no modelo simplificado do sistema, após a sua estabilização. A Seção 5 apresenta e analisa os resultados que mostram o desempenho do controlador projetado quando aplicado no sistema original (instável e não simplificado). A Seção 6 apresenta alguns comentários finais e as conclusões do trabalho.

2. Descrição do Sistema e Obtenção de seu Modelo de Ordem Reduzida

O sistema considerado neste trabalho, similar a muitos outros, é um avião do tipo Canard tomado em (Chiang e Safonov, 1996), onde se encontra mais detalhes sobre suas características e variáveis. Seu modelo em espaço de estados é dado no Apêndice A e nele verifica-se que o sistema é multivariável, de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas. Tal modelo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p \\ y_p &= C_p x_p \end{aligned} \quad (1)$$

e sua matriz de transferência associada é dada por

$$G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p. \quad (2)$$

As curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do sistema são mostradas na Figura 1 (em azul) e os seus pólos, dentre eles um par complexo instável, são os seguintes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.2580 \\ \lambda_2 &= -5.6757 \\ \lambda_{3,4} &= 0.6899 \pm j0.2484 \\ \lambda_5 &= \lambda_6 = -30 \end{aligned} \quad (3)$$

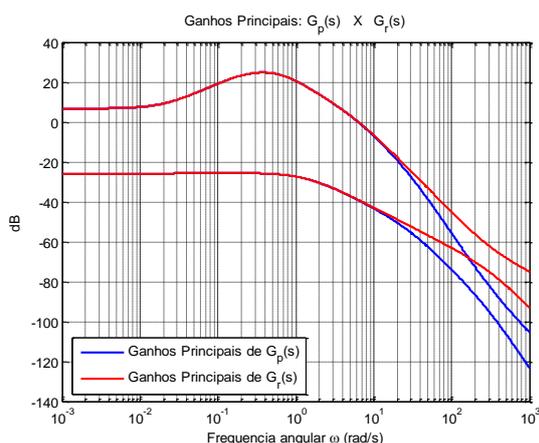


Figura 1. Ganhos principais: modelo reduzido versus modelo original do sistema.

O modelo do sistema pode ser particionado na seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dots \\ \dot{x}_{\bar{d}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0_{2 \times 4} & \vdots & -30I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \dots \\ x_{\bar{d}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ \dots \\ 30I_2 \end{bmatrix} u_p \\ y_p &= \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \dots \\ x_{\bar{d}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

e sua matriz de transferência pode ser escrita como

$$G_p(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} A_{12} \frac{30}{(s+30)} I_2, \quad (5)$$

que corresponde ao diagrama de blocos mostrado na Figura 2.

Na Equação (4) observa-se que: as variáveis de $x_{\bar{d}}$ estão associadas com os modos mais rápidos do sistema (λ_5 e λ_6), e, assim sendo, elas são as variáveis mais rápidas e não dominantes do sistema; as variáveis de x_d estão associadas com os modos mais lentos e dominantes do sistema.

Nota-se também que as saídas do sistema independem das variáveis rápidas e que essas variáveis rápidas são desacopladas entre si e independentes das variáveis lentas do sistema.

Diante de todas essas características, se conclui que as variáveis rápidas (não dominantes) do sistema atingem seus valores de regime permanente bem antes das demais variáveis, as dominantes, atingirem os seus. Por tudo isso, pode-se então fazer a seguinte aproximação

$$\dot{x}_{\bar{d}} = -30I_2 x_{\bar{d}} + 30I_2 u_p \approx 0, \quad (6)$$

que resulta em

$$x_{\bar{d}} \approx u_p. \quad (7)$$

Esta aproximação possibilita a simplificação do modelo do sistema, que passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= A_{11} x_d + A_{12} u \\ y &= C_1 x_d \end{aligned} \quad (8)$$

Este modelo simplificado é de quarta ordem, enquanto o modelo original é de sexta ordem.

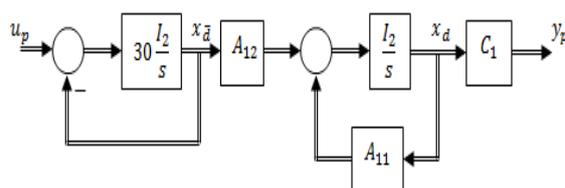


Figura 2. Diagrama de blocos do sistema $G_p(s)$.

Para simplificar a notação, deste ponto em diante as matrizes A_{11} , A_{12} e C_1 passam a ser denotadas por \bar{A} , \bar{B} e \bar{C} respectivamente. Seus valores são dados a seguir.

$$A_{11} = \bar{A} = \begin{bmatrix} 0.0226 & -36.6170 & -18.8970 & -32.0900 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \bar{B} = \begin{bmatrix} 3.2509 & -0.7626 \\ -0.1708 & -0.0050 \\ -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C_1 = \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transferência do modelo de ordem reduzida é dada por

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} \quad (10)$$

As curvas dos ganhos principais de $G_p(s)$ e $\bar{G}(s)$ são mostradas na Figura 1 (em azul e vermelho). Observa-se que os ganhos principais correspondentes são iguais nas baixas frequências, mas apresentam diferenças nas frequências acima de 20 rad/s.

3. Estabilização da Planta Via Compensador Dinâmico de Ordem Reduzida

Em um estudo bem detalhado, Matos (2008) mostrou que os controladores projetados de acordo com o método LQG/LTR não apresentam bom desempenho quando são aplicados em sistemas instáveis com pólos próximos do eixo imaginário – caso em que se enquadra o sistema considerado neste trabalho. Observa-se nesses sistemas que as suas saídas apresentam oscilações de baixa frequência que são mal amortecidas e demoram pra convergir para seus valores de regime permanente.

Para solucionar este problema Matos et al (2006) sugeriram a estabilização prévia do sistema instável a ser controlado através do uso de um compensador dinâmico (Brasch e Pearson, 1970). A inclusão deste compensador no sistema considerado neste trabalho está representada no diagrama de blocos mostrado na Figura 3, onde se observa que ele só atua na parte do sistema cuja dinâmica é representada pelo seu modelo de ordem reduzida (Equação (8)).

A representação em espaço de estados de um compensador dinâmico pode ser escrita como

$$\dot{z} = Fz + Gy \quad (11)$$

$$v = Hz + Jy$$

e sua ordem é dada por

$$n_{cd} = \min\{n_c, n_o\} - 1 \quad (12)$$

onde n_c e n_o são os índices de controlabilidade e observabilidade do sistema (Kailath, 1980). No caso do modelo de ordem reduzida encontra-se $n_{cd} = 1$. Com o modelo original (Equação A1) seria $n_{cd} = 2$.

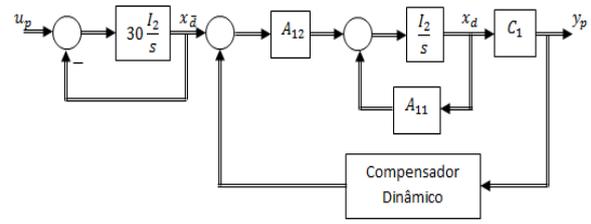


Figura 3. Diagrama de blocos do sistema após adição do compensador dinâmico.

Considerando-se o modelo de ordem reduzida e supondo que seus modos instáveis sejam realocados em $\lambda_{3,4} = -0.6899 \pm j0.2484$, mantendo-se os demais modos em suas posições originais e arbitrando-se o novo pólo em $\lambda = -8$, encontra-se o seguinte resultado:

$$\dot{z} = -47.1610z + [1 \quad 0]y$$

$$v = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0.9239 \\ 1.3076 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -204.6304 & 0 \\ -290.1253 & 0 \end{bmatrix} y \quad (13)$$

Substituindo-se a Equação (11) nas Equações (8)-(9) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} + \bar{B}J\bar{C} & \bar{B}H \\ G\bar{C} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ z \end{bmatrix}$$

que pode ser renomeada como

$$\dot{\bar{x}}_c = \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u$$

$$y = \bar{C}_c \bar{x}_c \quad (15)$$

cuja matriz de transferência é dada por

$$\bar{G}_c(s) = \bar{C}_c(sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c \quad (16)$$

Reintegrando-se ao sistema a parte relativa às suas variáveis rápidas, que foram desconsideradas no modelo de ordem reduzida, obtém-se a seguinte representação em espaço de estados do sistema estabilizado pelo compensador dinâmico de ordem reduzida,

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u$$

$$y = C_c x_c \quad (17)$$

onde

$$A_c = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ 0_{2 \times 5} & -30I_2 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ 30I_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

A Figura 4 mostra os ganhos principais dos dois modelos do sistema estabilizado pelo compensador dinâmico de ordem reduzida (1ª. ordem). Percebe-se que os ganhos principais mantem-se iguais em baixas frequências, porém há diferenças a partir de 20 rad/s.

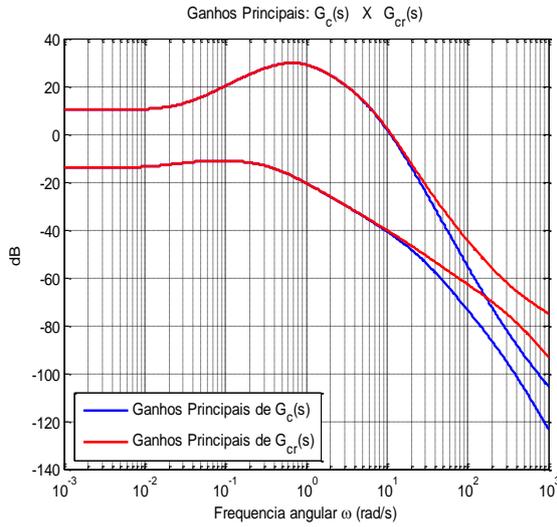


Figura 4. Ganhos principais dos modelos do sistema com estabilizador.

4. Projeto de Controlador LQG/LTR com Base em Modelo de Ordem Reduzida

O projeto de controladores do tipo LQG/LTR pode ser feito de dois modos alternativos e a escolha entre eles depende se as incertezas multiplicativas do modelo de projeto são representadas na sua entrada ou sua saída. No caso do sistema em consideração, a obtenção do modelo de ordem reduzida é feita mediante a eliminação da dinâmica (rápida) referente aos integradores realimentados que aparecem no diagrama de blocos do sistema mostrado na Figura 3. Nota-se nesta Figura que esses integradores localizam-se na entrada do restante do sistema. Portanto, os erros e/ou incertezas do modelo simplificado (Equação 15) devem ser representados na sua entrada. Nesse caso então, os integradores necessários para aumentar os ganhos do sistema nas baixas frequências, e que também possibilitam a equalização desses ganhos, devem ser adicionados nas saídas do referido modelo. O diagrama de blocos mostrado na Figura 5 representa toda essa situação.

A adição dos integradores na saída do modelo leva a representação do sistema para a seguinte forma aumentada

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & 0_{5 \times 2} \\ -\bar{C}_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} u \quad (19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 5} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ x_i \end{bmatrix}$$

cujas matrizes são denotadas por \bar{A}_i , \bar{B}_i e \bar{C}_i . A sua matriz de transferência correspondente é obtida através da relação

$$\bar{G}_i(s) = \bar{C}_i (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i. \quad (20)$$

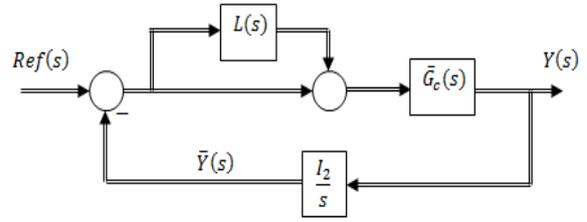


Figura 5. Modelo do sistema com incertezas na sua entrada e integradores na sua saída.

Após a adição dos integradores, o próximo passo na realização do projeto do controlador LQG/LTR é projetar um regulador LQR cujas características de resposta em frequência dos ganhos principais de sua matriz de transferência em malha aberta sejam equalizadas e apresentem altos ganhos nas baixas frequências, baixos ganhos nas altas frequências e tenham frequência de “crossover” que proporcione uma rápida resposta transitória para o sistema regulado em malha fechada.

A matriz de transferência deste regulador é dada por

$$T_{LQ}(s) = K_c (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i \quad (21)$$

onde a matriz de ganhos é calculada por

$$K_c = R_c^{-1} \bar{B}_i^T P \quad (22)$$

onde P é a única matriz simétrica positiva definida que resolve a seguinte equação algébrica de Riccati (ARE):

$$\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i - P \bar{B}_i R_c^{-1} \bar{B}_i^T P + Q_c = 0 \quad (23)$$

Para garantir a equalização dos ganhos principais da matriz de transferência $T_{LQ}(s)$, Cruz (1996) sugere que se use na Equação (23) a seguinte matriz Q_c :

$$Q_c = H^T H \quad (24)$$

onde

$$\begin{aligned} H &= [H_1 \quad H_2] \\ H_1 &= H_2 \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \\ H_2 &= -(\bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \bar{B}_c)^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

Para o ajuste da frequência de “crossover” sugere-se que a matriz R_c seja escolhida como

$$R_c = \rho I \quad (26)$$

onde o parâmetro escalar ρ se relaciona com a frequência de “crossover” desejada para o sistema através da seguinte equação:

$$1/\sqrt{\rho} = \omega_c. \quad (27)$$

Com as escolhas de Q_c e R_c acima indicadas, a matriz de transferência do regulador LQR torna-se

$$T_{LQ}(s) = \frac{\omega_c}{s} I_2. \quad (28)$$

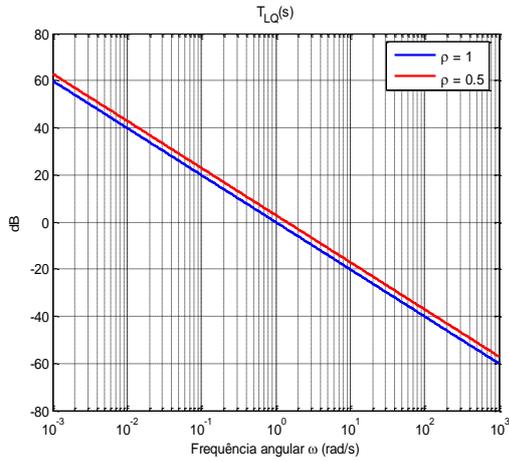


Figura 6. Ganhos de $T_{LQ}(s)$ equalizados em todas as frequências e ajuste do “crossover”.

A Figura 6 mostra as curvas de resposta em frequência dos ganhos principais do regulador LQR – em azul, considerando-se $\rho = 1$; em vermelho, considerando-se $\rho = 0.5$.

O resultado obtido para a matriz de ganhos do regulador LQR, considerando-se $\rho = 0.5$, é dado a seguir:

$$K_c = \begin{bmatrix} -0.0390 & -0.0180 \\ -8.4289 & -11.4405 \\ -0.0032 & 0.0600 \\ 7.5402 & 11.0653 \\ 277.0539 & 392.1048 \\ 5.0672 & 4.9004 \\ 1.2588 & 0.5850 \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

A etapa final do projeto do controlador LQG/LTR é projetar um filtro de Kalman para ser usado em conjunto com o regulador LQR. Juntos eles constituem o referido controlador denotado por $K(s)$. No projeto deste filtro busca-se fazer com que as características de resposta em frequência dos ganhos principais da matriz de transferência $K(s)\bar{G}_i(s)$ sejam semelhantes às de $T_{LQ}(s)$, a matriz de transferência do regulador LQR.

A matriz de transferência do filtro de Kalman é dada por

$$T_{KF}(s) = \bar{C}_i (sI - \bar{A}_i)^{-1} K_F \quad (30)$$

onde a matriz de ganhos é calculada por

$$K_F = \Sigma C_i^T R_f^{-1} \quad (31)$$

onde Σ é única matriz simétrica positiva definida que resolve a seguinte equação algébrica de Ricatti. (ARE):

$$\bar{A}_i \Sigma + \Sigma \bar{A}_i^T + Q_f - \Sigma \bar{C}_i^T R_f^{-1} \bar{C}_i \Sigma = 0 \quad (32)$$

Para que os ganhos principais da matriz $K(s)\bar{G}_i(s)$ sejam semelhantes aos de $T_{LQ}(s)$, deve-se usar na Equação (32) os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} R_f &= \mu I_2, \quad \mu = 1 \\ Q_f &= \bar{B}_i \bar{B}_i^T + q^2 \bar{B}_i \bar{B}_i^T \\ q^2 &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (33)$$

Fazendo-se $q^2 = 10^{16}$ obtém-se o seguinte resultado para a matriz dos ganhos do filtro de Kalman:

$$K_F = \begin{bmatrix} 3.5800 & 1.0404 \\ -0.1843 & -0.0095 \\ -33.5469 & -19.2225 \\ -0.0128 & -0.0311 \\ -0.00006 & -0.000003 \\ 0.00006 & 0.000003 \\ 0.000003 & 0.00002 \end{bmatrix} \times 10^8 \quad (34)$$

Após o cálculo das matrizes K_c e K_F conclui-se o projeto do controlador LQG/LTR. Sua representação em espaço de estados é definida pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (\bar{A}_i - \bar{B}_i K_c - K_F \bar{C}_i) \hat{x} - K_F y \\ u &= -K_c \hat{x} \end{aligned} \quad (35)$$

e sua matriz de transferência é dada por

$$K(s) = K_c (sI - \bar{A}_i + \bar{B}_i K_c + K_F \bar{C}_i)^{-1} K_F \quad (36)$$

A tripla de matrizes da representação em espaço de estados da matriz $K(s)\bar{G}_i(s)$ é dada a seguir:

$$\begin{aligned} \bar{A}_K &= \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{B}_i K_c - K_F \bar{C}_i & -K_F \bar{C}_i \\ 0_{7 \times 7} & \bar{A}_i \end{bmatrix} \\ \bar{B}_K &= \begin{bmatrix} 0_{7 \times 2} \\ \bar{B}_i \end{bmatrix} \\ \bar{C}_K &= [K_c \quad 0_{2 \times 7}] \end{aligned} \quad (37)$$

A Figura 7 mostra os ganhos principais das matrizes $T_{LQ}(s)$ e $K(s)\bar{G}_i(s)$ onde nota-se que todas as quatro curvas são totalmente coincidentes. Isso indica que houve um perfeito casamento de ganhos e que o *loop transfer recovery* foi total.

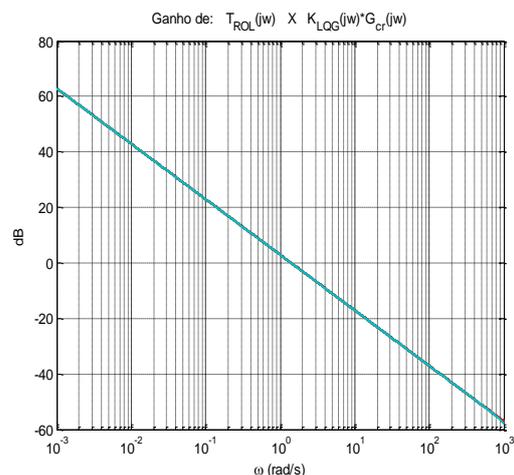


Figura 7. Ganhos principais, superior e inferior, de $T_{LQ}(s)$ versus $K(s)\bar{G}_i(s)$.

5. Análise do Desempenho Sistema com Controlador de Ordem Reduzida

O controlador $K(s)$ do tipo LQG/LTR obtido na seção anterior (Equações (35)-(36)) foi projetado com base em um modelo de ordem reduzida (Equações (19)-(20), que é de 7ª. ordem após o acréscimo de dois integradores na saída da planta) do sistema estabilizado a ser controlado (Equação (18), cuja ordem aumenta de 7ª. para 9ª., após o acréscimo de dois integradores na saída da planta). Seu desempenho deve ser testado no sistema original após a sua estabilização (Equação (18)) e a adição de integradores em sua saída.

O acréscimo de integradores na saída do sistema estabilizado pelo compensador dinâmico leva à seguinte representação em espaço de estados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_c & 0_{7 \times 2} \\ -C_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 7} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_i \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

cujas matrizes podem ser denotadas por A_i , B_i e C_i , e levam à seguinte matriz de transferência

$$G_i(s) = C_i (sI - A_i)^{-1} B_i. \quad (39)$$

A representação em espaço de estados da matriz de transferência em malha aberta do sistema controlado $K(s)G_i(s)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{KG} &= A_{KG} x_{KG} + B_{KG} u + B_{REF} Rfe \\ u &= -K_{KG} x_{KG} \\ y &= C_{KG} x_{KG} \end{aligned} \quad (40)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{KG} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{B}_i K_c - K_f \bar{C}_i & -K_f \bar{C}_i \\ 0_{9 \times 7} & A_i \end{bmatrix} \\ B_{KG} &= \begin{bmatrix} 0_{7 \times 2} \\ B_i \end{bmatrix} & B_{REF} &= \begin{bmatrix} 0_{14 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \\ K_{KG} &= \begin{bmatrix} K_c & 0_{2 \times 9} \end{bmatrix} \\ C_{KG} &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 7} & C_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

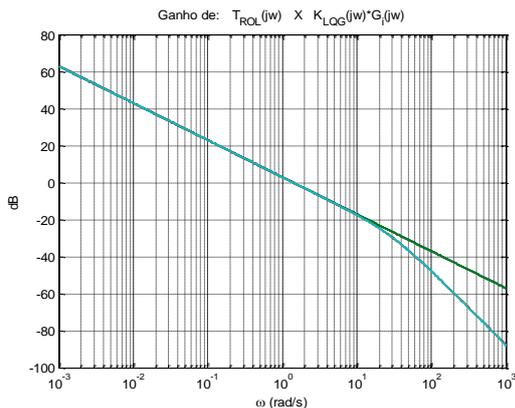


Figura 8. Ganhos principais, superior e inferior, de $T_{LQ}(s)$ versus $K(s)G_i(s)$.

A Figura 8 mostra os ganhos principais das matrizes $T_{LQ}(s)$ e $K(s)G_i(s)$, onde nota-se que, nas baixas frequências, os referidos ganhos são iguais, havendo uma diminuição dos ganhos de $K(s)G_i(s)$ nas frequências acima de 20 rad/s.

Os gráficos na Figura 9 apresentam o comportamento das saídas do sistema em resposta à aplicação (não simultânea!) de um sinal do tipo degrau unitário nas referências 1 e 2. No primeiro gráfico, relativo ao degrau na primeira referência, nota-se que a saída $y_1(t)$ converge para o seu valor de referência em cerca de 3.3 segundos e que a saída $y_2(t)$ não sofre nenhum efeito de acoplamento. No segundo gráfico, relativo ao degrau na segunda referência, observa-se que a saída $y_2(t)$ converge para o seu valor de referência em cerca de 2.3 segundos e que a saída $y_1(t)$ sofre um leve efeito de acoplamento – uma pequena oscilação que é completamente amortecida após 3.0 segundos.

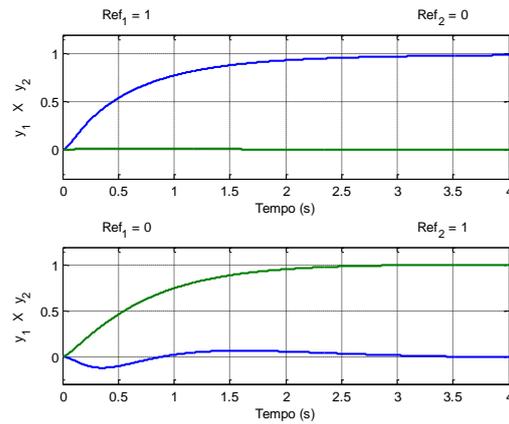


Figura 9. Saídas do sistema após aplicação de degrau na 1ª. e 2ª. referência.

Os gráficos na Figura 10 apresentam os sinais de controle que atuam sobre o sistema controlado no caso das simulações acima relatadas. Nos dois gráficos nota-se que, durante o transitório de 20 milissegundos logo após a aplicação das referências, o sinal de controle $u_2(t)$ atua com maior intensidade do que o sinal $u_1(t)$ e que ambos são de rapidíssima atuação.

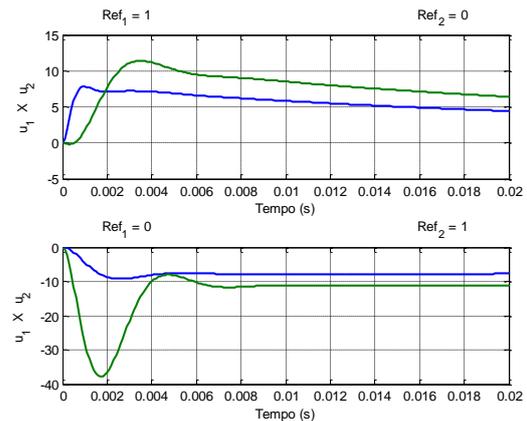


Figura 10. Sinais de controle após aplicação de degrau na 1ª. e 2ª. referência.

Após esse transitório, as intensidades dos sinais convergem para valores constantes e de menores magnitudes, permanecendo o sinal de controle $u_2(t)$ sempre maior do que o sinal $u_1(t)$.

Sobre os resultados obtidos e acima apresentados é importante destacar a grande importância da escolha dos parâmetros de projeto ρ e q^2 . Quanto menor for o valor escolhido para o parâmetro escalar ρ , maior será a frequência de “*crossover*” do sistema. Isso tende a fazer com que a resposta do sistema ao sinal de referência aplicado seja mais rápida (transitório mais rápido). Mas, por outro lado, respostas mais rápidas tendem a exigir do controlador sinais de controle com maior magnitude, principalmente no regime transitório.

Com relação ao parâmetro de recuperação q^2 , quanto maior o seu valor, melhor será a semelhança (*loop transfer recovery*) entre as curvas de resposta em frequência dos ganhos principais da matriz de transferência de malha aberta do sistema controlado – $K(s)G_i(s)$, e a dos correspondentes ganhos principais da matriz de transferência do regulador LQR – $T_{LQ}(s)$. O preço que se paga por esta melhor semelhança (ou “*recovery*”) é o aumento excessivo dos ganhos que aparecem na matriz K_F – a matriz dos ganhos do filtro de Kalman. Quanto maior forem esses ganhos, maior também serão as intensidades dos sinais de controle.

Com relação ao aspecto referente à redução da ordem do controlador, ela ocorre em duas etapas do projeto. Primeiro na etapa referente ao projeto do compensador dinâmico que estabiliza o sistema a ser controlado. Caso a simplificação do modelo usado para a realização de seu projeto não tivesse sido empregada, o referido compensador teria de ser de segunda ordem e o sistema passaria a ser de oitava ordem. Usando-se a simplificação, a estabilização pôde ser realizada com um compensador de primeira ordem e o sistema passou a ser de sétima ordem.

Na etapa referente ao projeto do controlador LQG/LTR, caso a simplificação do modelo não fosse usada, o modelo de projeto seria de oitava ordem, e com o acréscimo dos dois integradores, necessários para o aumento e equalização dos ganhos principais do sistema, o referido modelo passaria a ser de décima ordem. Com isso o controlador LQG/ LTR também seria de décima ordem.

Usando-se a simplificação, o modelo de projeto ficou de quinta ordem, e com o acréscimo dos dois integradores passou a ser sétima ordem. Neste caso o controlador LQG/LTR obtido no projeto foi de sétima ordem.

Considerando-se que tudo que é adicionado ao sistema original faz parte do controlador, conclui-se que o resultado final do projeto, caso a simplificação do modelo de projeto não fosse usada, seria um controlador de décima quarta ordem. Usando-se a simplificação, obteve-se um controlador de décima ordem. Ou seja, consegue-se uma redução de cerca de trinta por cento na ordem do controlador.

6. Conclusões

Este trabalho tratou da questão do projeto de controladores do tipo LQG/LTR de ordem reduzida através do uso de modelos simplificados do sistema a ser controlado. A metodologia apresentada não é de caráter geral, mas pode ser empregada no caso de sistema com certas características especiais que são apresentadas logo no início do trabalho.

Um exemplo ilustrativo da aplicação da metodologia foi apresentado, no qual se obteve uma redução na ordem do controlador de cerca de trinta por cento.

O desempenho conjunto do sistema com o controlador projetado foi testado através de simulações nas quais sinais de referência do tipo degrau foram aplicados. Os resultados mostraram um bom desempenho do sistema, dado que as suas saídas foram precisas em regime permanente, rápidas no transitório e com mínimos efeitos de acoplamento. Já os sinais de controle apresentaram variações de grandes amplitudes no período transitório logo após a aplicação das entradas de referência, mas eles rapidamente convergiram para valores constantes com menores amplitudes.

Referências Bibliográficas

- Banda, S. S. e Ridgely, D. B. (1986). Introduction to Robust Multivariable Control. Relatório Técnico n°. AFWAL-TR-85-3102, Flight Dynamic Laboratory, Patterson-Wright Air Force Base, EUA.
- Brasch, F. M. e Pearson, J. B. (1970). Pole Placement Using Dynamic Compensators. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-15, No. 1, pp. 34-43.
- Chiang, R. Y. e Safonov, M. G. (1996). Robust Control Toolbox. The MathWorks, Inc.
- Cruz, J. J. (1996). Controle Robusto Multivariável. Editora da USP, São Paulo, SP.
- Doyle, J. C. e Stein, G. (1979). Robustness with Observers. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No 4, pp. 607-611.
- Doyle, J. C. e Stein, G. (1981). Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis. IEEE Trans. on Automatic Control Theory, Vol. AC-26, No. 1, pp. 4-16.
- Kailath, T. (1980). Linear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Matos, E. J., Souza, R. N. e Souza, J. R. B. (2006). Projeto de Controlador Robusto para Sistema Multivariável Instável com Uso de Pré-Compensador Dinâmico. Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática, Salvador, BA, vol. I, pp. 2454-2459.
- Matos, E. J. (2008). Projetos de Controladores Robustos do Tipo LQG/LTR para Sistema Multivariável Instável com Uso de Pré-Compensador Dinâmico. Tese de Doutorado, UFPA, Belém-PA.

Apêndice A

Representação em espaço de estados do sistema considerado neste artigo, retirado do livro de Chiang e Safonov (1996).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.0226 & -36.6170 & -18.8970 & -32.0900 & 3.2509 & -0.7626 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 & -0.1708 & -0.0050 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 & -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} u \quad (A1)$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$