

CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS UTILIZANDO REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DA SAÍDA E FUNÇÕES DE LYAPUNOV-METZLER

E. I. MAINARDI JÚNIOR*, M. C. M. TEIXEIRA†, R. CARDIM†, E. ASSUNÇÃO†, DIOGO R. DE OLIVEIRA†, VICTOR L. YOSHIMURA‡

*IFC - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, Campus Videira
Departamento de Eletroeletrônica
Rodovia SC 135, km 125 - Campo Experimental - 89560-000, Videira, Santa Catarina, Brasil

†UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle,
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

‡IFMT - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso, Campus Cuiabá
DAE-E - Departamento de Eletricidade e Eletrônica
Rua Zulmira Canavarros, 95 - Centro Norte - 78005-200 Cuiabá, Mato Grosso, Brazil

Emails: edson.junior@ifc-videira.edu.br, marcelo@dee.feis.unesp.br,
rcardim@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, diogo_oliveira6@hotmail.com,
victor.yoshimura@cba.ifmt.edu.br

Abstract— This paper aims at studying the stability of continuous-time switched linear systems with a control law that uses only a static output feedback of the plant. The development of this paper is based on quadratic Lyapunov functions, Linear Matrix Inequalities (LMIs) and Lyapunov-Metzler inequalities. A performance index, guaranteed cost, is also specified in the design of controllers making the procedure more general. One example show that the proposed method has an adequate performance even in situations when the matrices of the linear subsystems are not Hurwitz.

Keywords— Switched Linear Systems, Quadratic Lyapunov Function, Output Feedback, Lyapunov-Metzler Inequalities.

Resumo— Este artigo tem como objetivo o estudo de estabilidade de sistemas lineares chaveados contínuos no tempo, com uma lei de controle que utiliza apenas a realimentação estática da saída da planta. O desenvolvimento do artigo é baseado em funções de Lyapunov quadráticas, Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) e Desigualdades de Lyapunov-Metzler. Um índice de desempenho (custo garantido) é especificado no projeto dos controladores tornando o procedimento mais geral. Um exemplo mostra que o procedimento de projeto proposto tem um desempenho adequado inclusive em situações nas quais as matrizes dos subsistemas lineares não são Hurwitz.

Palavras-chave— Sistemas Lineares Chaveados, Função de Lyapunov Quadrática, Realimentação da saída, Desigualdades de Lyapunov-Metzler.

1 Introdução

A análise e projeto de sistemas chaveados tem recebido grande atenção nas últimas décadas, devido principalmente ao fato de um melhor desempenho global do sistema, além de suas inúmeras aplicações em sistemas práticos tais como, controle de sistemas mecânicos, controle de processos, controle de aeronaves, indústria automotiva e eletrônica de potência. Veja por exemplo em (Cardim et al., 2009; Deaecto et al., 2010; Yoshimura et al., 2013; Mainardi Júnior et al., 2012b) algumas aplicações de estratégias de controle no projeto de conversores CC-CC.

Em geral, a ideia é projetar uma regra de chaveamento adequada que seleciona a cada instante de tempo, um subsistema dinâmico dentre um determinado número de subsistemas disponíveis e ainda assegure a estabilidade assintótica com garantia de desempenho adequado (Geromel and Colaneri, 2006; Decarlo et al., 2000; Sun and Ge, 2005). Para maiores detalhes sobre siste-

mas chaveados e suas aplicações, veja (Lin. and Antsaklis, 2009; Liberzon, 2003; Hespanha and Morse, 2002).

Baseado em funções de Lyapunov quadráticas (Feron, 1996; Ji et al., 2005; Skafidas et al., 1999), muitos autores têm proposto controladores que asseguram a estabilidade para a classe de sistemas chaveados lineares. Em (Wicks et al., 1994), o problema de estabilidade para sistemas lineares chaveados foi estudado e mostrou-se a partir de uma candidata a função de Lyapunov quadrática, que a existência de uma combinação convexa Hurwitz (com todos autovalores com parte real negativa) das matrizes dos subsistemas implica na existência de uma estratégia de chaveamento dependente do vetor de estado que estabiliza o sistema linear chaveado. Neste contexto, (Feron, 1996) propôs uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de sistemas lineares chaveados, além de estender os resultados para o projeto de controladores com realimentação dinâmica da saída.

Entretanto, a existência de problemas práticos

cos, nos quais o vetor $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é mais fácil de se obter do que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, torna-se interessante o projeto de uma regra de chaveamento que assegure a estabilidade assintótica para a classe de sistemas chaveados lineares, com acesso somente à saída da planta. Em (Geromel et al., 2008), condições de estabilidade, uma estratégia de chaveamento e projeto de controle via realimentação dinâmica da saída foram propostas para uma classe particular de desigualdades matriciais, denominada Lyapunov-Metzler. Mais recentemente, um nova estratégia de controle, considerando disponível somente a saída da planta do sistema linear chaveado, foi apresentada em (Mainardi Júnior et al., 2012a). Veja (Deaecto et al., 2011) para resultados considerando norma H_∞ no projeto de controladores via realimentação dinâmica da saída e (Dong and Yang, 2007) para outros importantes resultados.

A contribuição principal deste artigo é a proposta de novas condições de estabilidade e uma nova estratégia de chaveamento dependente apenas da saída da planta para a classe de sistemas lineares chaveados, baseados em inequações de Lyapunov-Metzler descritas em (Geromel and Colaneri, 2006). Um índice de desempenho (minimização de um custo garantido) é considerado a fim de tornar o procedimento de projeto mais geral. Os autores demonstram que as novas condições permitem encontrar uma solução para o problema proposto, quando factível, que não dependem do vetor $\lambda \in \Lambda$ associado ao ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$, além de um custo garantido menor.

A análise de estabilidade foi reduzida a problemas descritos por LMIs (Boyd et al., 1994) que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa, por exemplo (Gahinet et al., 1995).

O artigo está organizado da seguinte forma: Na Seção 2, uma revisão de resultados disponíveis na literatura sobre estabilidade de sistemas chaveados é apresentada (Geromel and Colaneri, 2006; Mainardi Júnior et al., 2012a). Na Seção 3, o resultado principal deste estudo: uma nova condição de estabilidade baseada em funções de Lyapunov-Metzler e o projeto de uma estratégia de controle, utilizando realimentação estática da saída da planta para a classe de sistemas lineares chaveados, são propostos. Na Seção 4 um exemplos ilustra a teoria desenvolvida neste artigo.

A notação usada é padrão. Para matrizes ou vetores reais ($'$) indica o seu transposto. O conjunto composto pelos primeiros N inteiros positivos, ou seja, $\{1, \dots, N\}$ é denotado por \mathbb{K} . O conjunto de todos vetores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$ tais que $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$ é denotado por Λ . A combinação convexa de um conjunto de matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ é deno-

tado por $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$, sendo λ pertencente ao conjunto Λ .

2 Formulação do problema

Considere o sistema linear chaveado definido na forma de variáveis de estado (Geromel and Colaneri, 2006):

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída de controle, $\sigma(t)$ é a lei de chaveamento, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$. Supondo um conjunto conhecido de matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i = \{1, \dots, N\}$, então a regra de chaveamento $\sigma(t)$, é tal que

$$A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}, \quad (3)$$

sendo que $A_{\sigma(t)}$ comuta instantaneamente de A_i para A_j com, $i \neq j$, quando ocorrer a comutação de $\sigma(t) = i$ para $\sigma(t) = j$. Desta forma, a matriz $A_{\sigma(t)}$ é comutada entre os N vértices do politopo $\{A_1, \dots, A_N\}$. Então, o problema de controle é o seguinte:

Problema 1 *Projetar uma estratégia de chaveamento, tal que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado (1) seja globalmente assintoticamente estável.*

A seguir, um teorema importante descrito em (Deaecto et al., 2010), o qual apresenta uma condição necessária e suficiente para estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados, que será utilizado no desenvolvimento deste artigo, é apresentado.

Teorema 1 (Deaecto et al., 2010) *Considere o sistema linear chaveado (1)- (3). Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$A'_\lambda P + P A_\lambda < 0, \quad (4)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (x' P A_i x), \quad (5)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (1), (2) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Prova: A prova deste resultado utiliza uma função de Lyapunov $V(x) = x' P x$. Veja (Deaecto et al., 2010) para detalhes. \square

Agora, suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não é disponível, mas a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é disponível para realimentação. Então o novo problema de controle é o seguinte:

Problema 2 Determinar uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t) = u(y(t)), \quad (6)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado (1)-(3) globalmente assintoticamente estável e também satisfaça um certo índice de desempenho, por exemplo um custo garantido.

Note que não é considerada a estabilidade assintótica de cada subsistema associado às matrizes do conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. Uma solução para este problema, considerando uma função de Lyapunov quadrática com o seguinte índice de desempenho:

$$\min_{\sigma \in \mathbb{K}} \int_0^{\infty} z'z dt = \min_{\sigma \in \mathbb{K}} \int_0^{\infty} x'H'Hx dt, \quad z = Hx, \quad (7)$$

para $H = C$, é apresentada em (Mainardi Júnior et al., 2012a).

Teorema 2 (Mainardi Júnior et al., 2012a) Considere o sistema linear chaveado (1)-(3) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$P - \rho I_n < 0, \quad (8)$$

$$PA_i + A_i'P + H'H < Q_0 + C'Q_iC, \quad (9)$$

$$Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad (10)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (y'Q_iy), \quad (11)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (1)-(3) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \min_{\sigma \in \mathbb{K}} \int_0^{\infty} z'z dt < x_0'Px_0 < \rho x_0'x_0, \quad z = Hx \quad (12)$$

mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Prova: Veja (Mainardi Júnior et al., 2012a) para maiores detalhes. \square

O Teorema 2 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P > 0, \rho > 0} \left\{ \rho : (8)-(10) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K} \right\}. \quad (13)$$

Observação 1 Note que para solucionar as condições relacionadas aos Teoremas 1 e 2 é necessário especificar um vetor $\lambda \in \Lambda$, associado ao ponto de equilíbrio $x = x_e = 0$. Assim, dado um valor de $\lambda \in \Lambda$, uma solução factível para a LMI (9) é calculada.

Na próxima seção, a principal contribuição deste artigo é apresentada e condições suficientes baseadas em funções de Lyapunov-Metzler, para o controle do sistema linear chaveado, utilizando uma estratégia de chaveamento dependente da saída da planta, são propostas. A motivação para o novo método de controle proposto é devido este modelo permitir encontrar uma solução, quando factível, para o problema de controle que não depende do vetor $\lambda \in \Lambda$. Os autores não conhecem resultados similares para este método no modelo descrito em (1)-(3).

3 Controle de sistemas lineares chaveados utilizando funções de Lyapunov-Metzler

Considere o sistema linear chaveado (1)-(3), definido para todo $t \geq 0$. As condições de estabilidade global são obtidas adotando-se a seguinte função de Lyapunov (Geromel and Colaneri, 2006):

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x'P_i x \leq x'P_\lambda x, \quad (14)$$

sendo P_i , $i \in \mathbb{K}$ matrizes simétricas positivas definidas e $\lambda \in \Lambda$. Considere a classe de matrizes de Metzler (veja (Geromel and Colaneri, 2006) para maiores detalhes) denotada por \mathcal{M} e composta por todas as matrizes $\Pi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tais que

$$\pi_{ji} \geq 0, \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0, \quad i, j \in \mathbb{K}. \quad (15)$$

Agora, o problema de controle é o seguinte:

Problema 3 Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível para realimentação. Projetar uma estratégia de chaveamento, tal que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado (1)-(3) seja globalmente assintoticamente estável e também satisfaça um índice de desempenho (12).

Uma solução para o problema é descrita no teorema a seguir (Geromel and Colaneri, 2006).

Teorema 3 (Geromel and Colaneri, 2006) Assuma que existe $\Pi \in \mathcal{M}$ e um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas $\{P_1, \dots, P_N\}$ satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji}P_j + H'H < 0, \quad (16)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x \quad (17)$$

torna o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado (1)-(3) globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$\begin{aligned} J &= \min_{\sigma \in \mathbb{K}} \int_0^{\infty} z' z dt < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0 \\ &\leq \max_{i \in \mathbb{K}} (x_0' P_i x_0) < \rho x_0' I_n x_0, \end{aligned} \quad (18)$$

mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Prova: Veja (Geromel and Colaneri, 2006) para maiores detalhes. \square

Agora, suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não é totalmente disponível, mas que o vetor de saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é suposto disponível para realimentação. Então, o novo problema de controle proposto é o seguinte:

Problema 4 *Suponha que o vetor de estado $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é disponível para realimentação. Projetar uma estratégia de chaveamento, tal que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear chaveado (1)-(3) seja globalmente assintoticamente estável e também satisfaça um índice de desempenho (12), com base no Teorema 3.*

Uma solução para o Problema 4, é proposta no teorema a seguir. As condições de estabilidade são baseadas na classe de matrizes de Metzler (veja (Geromel and Colaneri, 2006) para maiores detalhes) denotada por \mathcal{M} e na seguinte função de Lyapunov:

$$\begin{aligned} v(x) &= \min_{i \in \mathbb{K}} x' (P + C' P_i C) x = x' P x + \min_{i \in \mathbb{K}} y' P_i y \\ &\leq x' (P + C' P_\lambda C) x, \end{aligned} \quad (19)$$

sendo P e P_i , $i \in \mathbb{K}$ matrizes simétricas e $\lambda \in \Lambda$.

Teorema 4 *Considere o sistema linear chaveado (1)-(3) e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é disponível. Se existirem matrizes simétricas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}$, $\rho > 0$ e uma matriz $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov Metzler*

$$P + C' P_i C - \rho I_n < 0, \quad (20)$$

$$P + C' P_i C > 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &A_i'(P + C' P_i C) + (P + C' P_i C) A_i \\ &+ \sum_{j=1}^N \pi_{ji} (P + C' P_j C) + H' H < 0, \end{aligned} \quad (22)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(y(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} (y' P_i y), \quad (23)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (1)-(3) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$\begin{aligned} J &= \min_{\sigma \in \mathbb{K}} \int_0^{\infty} z' z dt < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' (P + C' P_i C) x_0 \\ &\leq \max_{i \in \mathbb{K}} x_0' (P + C' P_i C) x_0 < \rho x_0' I_n x_0, \end{aligned} \quad (24)$$

mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Prova: Defina o conjunto $I(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, N\} / x' (P + C' P_i C) x = v(x)\}$, sendo $v(x)$ dada em (19). Suponha que, para $t \geq 0$, de (23), $u(y(t)) = i$, para algum $i \in I(x)$. Então, de (6), $\sigma(t) = u(y(t)) = i$. Assim, de (1)-(3), a derivada de Dini à direita (Geromel and Colaneri, 2006) de $v(x)$ dada em (19) é a seguinte:

$$\begin{aligned} D^+(v(x)) &= \min_{i \in I(x)} (x' P_i \dot{x} + \dot{x}' P_i x) \\ &\leq x' (A_i' (P + C' P_i C) + (P + C' P_i C) A_i) x \\ &= x' (A_i' (P + C' P_i C) + (P + C' P_i C) A_i \\ &\quad + H' H) x - x' H' H x. \end{aligned} \quad (25)$$

Relembrando que $x(t)' P_j x(t) \geq x(t) P_j x(t)$ e que $\pi_{ji} \geq 0$ para todo $j \neq i \in \mathbb{K}$, de (22) e (15) têm-se que:

$$\begin{aligned} D^+(v(x)) &\leq -x' \sum_{j=1}^N \pi_{ji} (P + C' P_j C) x - z' z \\ &< -z' z \leq 0, \quad z = Hx, \quad i \in \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (26)$$

Visto que $\dot{v}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{v}(0) = 0$, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Agora, integrando (26) de zero ao infinito e sabendo que $v(x)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, obtêm-se (12). A prova do Teorema 4 está concluída. \square

Observação 2 *Observe de (20)-(22), que as matrizes P e P_i , $i \in \mathbb{K}$, solução do Teorema 4 não dependem do vetor $\lambda \in \Lambda$ associado ao ponto de equilíbrio $x = x_e = 0$.*

Outro ponto a ser levado em consideração é que as condições propostas pelo Teorema 4 não exigem nenhuma propriedade de estabilidade das matrizes do conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$ (Geromel and Colaneri, 2006). Como $\pi_{ji} \geq 0$ para $i \neq j$, uma condição necessária para que a desigualdade (22) seja factível é que

$$\begin{aligned} &(A_i + \frac{\pi_{ii}}{2} I_n)' (P + C' P_i C) \\ &+ (P + C' P_i C) (A_i + \frac{\pi_{ii}}{2} I_n) < 0, \end{aligned} \quad (27)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Assim, sabendo que $(P + C' P_i C) > 0$ e $\pi_{ii} \leq 0$, para todo $i \in \mathbb{K}$, a factibilidade de (27) não exige a estabilidade de nenhuma das matrizes do conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$.

O Teorema (4) nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0, P_i>0, \rho>0} \left\{ \rho: (20)-(22) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K} \right\}. \quad (28)$$

4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção, um exemplo é utilizado para ilustrar o método de controle proposto nesse artigo. O objetivo principal é avaliar a eficiência do método de controle proposto pelos Teoremas 2 e 4. Os resultados foram obtidos utilizando o software MATLAB, por meio do solver LMlab.

Este exemplo foi proposto em (Sun and Ge, 2005). Considere o sistema linear chaveado (1)–(3), definido pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2,1 & 1,4 & 5,9 \\ -8,0 & -5,7 & -0,2 \\ 0,6 & 5,8 & 1,6 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1,0 & -0,5 & -2,8 \\ 4,8 & -5,0 & 1,1 \\ -1,0 & -6,6 & -2,1 \end{bmatrix}, \\ C = H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Note que os dois subsistemas são instáveis.

Para $\lambda_1 = 0,37$ e $\lambda_2 = 0,63$, do problema de minimização (13), relacionado ao Teorema 2 (Mainardi Júnior et al., 2012a), uma solução obtida foi $\rho = 3,68$,

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 3,0340 & -0,6038 & 0,9202 \\ -0,6038 & 1,2769 & -0,6743 \\ 0,9202 & -0,6743 & 1,1104 \end{bmatrix}, \\ Q_0 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,2663 & 0,0000 & 1,9774 \\ 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 1,9774 & 0,0000 & -0,5947 \end{bmatrix}, \\ Q_1 - Q_2 &= \begin{bmatrix} -0,6601 & 39,1120 \\ 39,1120 & 27,8292 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e de (12) o custo garantido $J < 9,56$. As trajetórias das variáveis de estado $x(t) \in \mathbb{R}^3$ em função do tempo, para a condição inicial $x_0 = [1,4435 \ -0,3510 \ 0,6232]'$, são ilustradas na Figura 1.

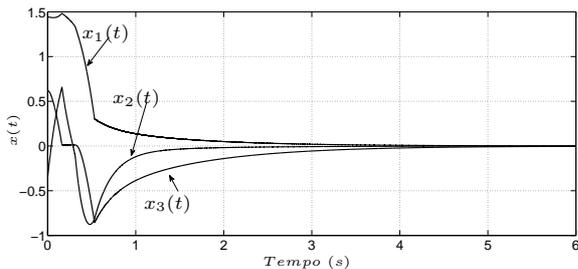


Figura 1: Estados do sistema - Teorema 2.

Agora, baseado na teoria de controle proposta pelo Teorema 4 para sistemas lineares chaveados, as condições que asseguram que o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (1)–(3), (23) e (29) é globalmente assintoticamente estável são as seguintes:

$$(P + C'P_1C) > 0, \quad (30)$$

$$(P + C'P_2C) > 0, \quad (31)$$

$$(P + C'P_1C) - \rho I_n < 0, \quad (32)$$

$$(P + C'P_2C) - \rho I_n < 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} A'_1(P + C'P_1C) + (P + C'P_1C)A_1 \\ + \pi_{21}C'(P_2 - P_1)C + H'H < 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} A'_2(P + C'P_2C) + (P + C'P_2C)A_2 \\ + \pi_{12}C'(P_1 - P_2)C + H'H < 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Então, para $\pi_{12} = 1600$ e $\pi_{21} = 2900$, do problema de minimização (28), relacionado ao Teorema 4 proposto, uma solução obtida foi $\rho = 3,45$,

$$P = 10^7 \times \begin{bmatrix} 2,8768 & -0,0000 & 1,0734 \\ -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \\ 1,0734 & -0,0000 & -3,7156 \end{bmatrix},$$

$$P_1 - P_2 = \begin{bmatrix} -0,0008 & 0,0086 \\ 0,0086 & 0,0053 \end{bmatrix},$$

e de (12) o custo garantido $J < 8,94$. As trajetórias das variáveis de estado $x(t) \in \mathbb{R}^3$ em função do tempo, para a condição inicial $x_0 = [1,4435 \ -0,3510 \ 0,6232]'$ são ilustradas na Figura 2.

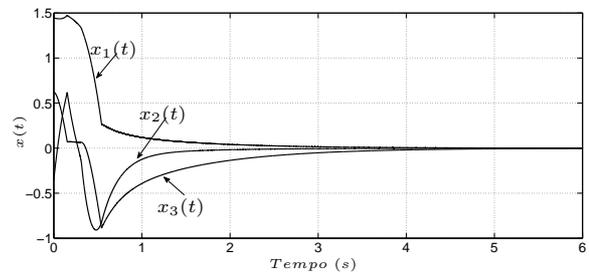


Figura 2: Estados do sistema - Teorema 4.

Observe das Figuras 1 e 2, que as respostas para o sistema controlado foram praticamente iguais. Entretanto o custo garantido obtido pelo problema de minimização (28), Teorema 4, foi menor que o obtido pelo problema de minimização (13), relacionado ao Teorema 2. Este fato se deve ao parâmetro $\pi_{ji} \geq 0$, $i \neq j \in \mathbb{K}$, que concede ao Teorema 4 condições menos conservadoras que aquelas apresentadas pelo Teorema 2.

5 Conclusões

Este estudo apresenta um método de projeto de controle para sistemas lineares chaveados contínuos no tempo utilizando somente um estratégia

de chaveamento que depende da saída da planta. O projeto foi baseado em funções de Lyapunov-Metzler e LMIs. Uma nova condição, que não depende do vetor $\lambda \in \Lambda$ associado ao ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$ foi obtida, e um índice de desempenho, minimização de um custo garantido, foi inserido tornando o procedimento de projeto mais geral. A teoria desenvolvida é ilustrada através de um exemplo e os resultados de simulações demonstraram que, quando factível, o teorema proposto também apresenta um desempenho adequado.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

- Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, 2nd edn, SIAM Studies in Applied Mathematics.
- Cardim, R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Covacic, M. R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Trans. Ind. Electron* **56**(9): 3505–3513.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2011). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *Automatica* **47**(8): 1713–1720.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C., Garcia, F. S. and Pomilio, J. A. (2010). Switched affine systems control design with application to DC-DC converters, *IET Control Theory Appl.* **4**(7): 1201–1210.
- Decarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proc. of the IEEE* **88**(7): 1069–1082.
- Dong, J. and Yang, G. H. (2007). Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties, *IEEE Trans. on Autom. Control* **52**(10): 1930–1936.
- Feron, E. (1996). Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback, *Center for Intelligent Control Systems, MIT Publication CICS-P*.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI control toolbox - For use with Matlab*, The Math Works Inc.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **45**: 1915–1930.
- Geromel, J., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **53**(3): 720–733.
- Hespanha, J. P. and Morse, A. S. (2002). Switching between stabilizing controllers, *Automatica* **38**: 1905–1917.
- Ji, Z., Wang, L. and Xie, G. (2005). *Quadratic stabilization of switched systems*, Vol. 36, 7 edn, Taylor & Francis.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Systems & Control, Birkhuser.
- Lin., H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, *IEEE Trans. Autom. Control* **54**: 308–322.
- Mainardi Júnior, E. I., Teixeira, M. C. M., Moreira, M. R., Cardim, R., Assunção, E. and Yoshimura, V. L. (2012a). Controle via realimentação da saída para sistemas lineares chaveados, *Congresso Brasileiro de Automática, 2012*.
- Mainardi Júnior, E. I., Teixeira, M. C. M., Moreira, M. R., Cardim, R., Assunção, E. and Yoshimura, V. L. (2012b). On control design of switched affine systems with application to DC-DC converters, *Frontiers in Advanced Control Systems, In-Teh, 2012*.
- Skafidas, E., Evans, R. J., Savkin, A. V. and Petersen, I. R. (1999). Stability results for switched controller systems, *Automatica* **35**: 553–564.
- Sun, Z. and Ge, S. S. (2005). *Switched Linear Systems: Control and Design*, Communications and Control Engineering, 1st edn, Springer, London.
- Wicks, M. A., Peleties, P. and DeCarlo, R. A. (1994). Construction of piecewise lyapunov functions for stabilizing switched systems, *Decision and Control, 1994, Proc. of the 33rd IEEE Conference on*, Vol. 4, pp. 3492–3497 vol.4.
- Yoshimura, V. L., Assunção, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Júnior, E. I. (2013). Observer-Based Control Design for Switched Affine Systems and Applications to DC-DC Converters, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*.