

FILTRAGEM \mathcal{H}_2 PARA SISTEMAS NEBULOSOS TAKAGI-SUGENO DISCRETOS NO TEMPO

MÁRCIO J. LACERDA*, EDUARDO S. TOGNETTI†, RICARDO C. L. F. OLIVEIRA*, PEDRO L. D. PERES*

**Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, 13083-852, Campinas, SP, Brasil.*

†*Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília – UnB, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.*

Emails: marciojr@dt.fee.unicamp.br, estognetti@ene.unb.br, ricfow@dt.fee.unicamp.br, peres@dt.fee.unicamp.br

Resumo— Este artigo apresenta novas relaxações na forma de desigualdades matriciais lineares para a síntese de filtros nebulosos de ordem completa com critério \mathcal{H}_2 para sistemas nebulosos Takagi-Sugeno discretos no tempo com parâmetros arbitrariamente variantes no tempo. Embora apenas suficientes, as relaxações são baseadas em matrizes polinomiais de grau arbitrário e podem fornecer resultados progressivamente menos conservadores. Testes numéricos aplicados em exemplos retirados da literatura ilustram o melhor desempenho dos filtros projetados quando comparados com filtros independentes das variáveis premissas.

Palavras-chave— Sistemas nebulosos Takagi-Sugeno (T-S), Desigualdades Matriciais Lineares, Sistemas discretos no tempo, Filtragem, Norma \mathcal{H}_2

Abstract— This paper presents new linear matrix inequality relaxations for full order fuzzy \mathcal{H}_2 filter design for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with arbitrarily fast time-varying parameters. Although only sufficient, the relaxations are based on homogeneous polynomial matrices of arbitrary degree and can provide progressively less conservative results. Numerical tests applied in examples borrowed from the literature illustrate the better performance of the proposed filters when compared to filters independent of the premises variables.

Keywords— Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems, Linear Matrix Inequalities, Discrete-time systems, Filtering, \mathcal{H}_2 Norm

1 Introdução

Desde que o modelo Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi e Sugeno, 1985) foi proposto, o interesse no estudo de sistemas nebulosos (em inglês, *fuzzy systems*) tem aumentado consideravelmente. Um dos principais motivos é o fato de que os modelos T-S são capazes de representar de maneira eficiente sistemas não-lineares complexos. Neste contexto, as desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) e a teoria de Lyapunov têm sido utilizadas em grande parte dos métodos para a análise de estabilidade de sistemas nebulosos (Tanaka e Wang, 2001).

Paralelamente, o problema de filtragem para sistemas lineares tem recebido muita atenção nos últimos anos. Condições suficientes para a existência de filtros robustos para sistemas lineares incertos com critérios \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ baseadas em LMIs apareceram primeiramente com estabilidade quadrática (Geromel, 1999; de Souza e Trofino, 2000; Geromel et al., 2000; Geromel e de Oliveira, 2001), funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (Xie et al., 2004; Barbosa et al., 2005; Duan et al., 2006) e, mais recentemente, com funções de Lyapunov com dependência polinomial de grau maior que um (Gao et al., 2008; Lacerda et al., 2011c). No contexto de sistemas variantes no tempo, embora a estabilidade quadrática seja a mais utilizada para tratar variações arbitrárias no caso contínuo (Borges et al., 2008; Lacerda et al., 2011a), no caso discreto métodos baseados em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros que podem levar em conta, ou não, os limitantes dos parâmetros variantes (Borges et al., 2010; de Souza et al., 2007; Lacerda et al., 2011b) podem ser

utilizados. Esses métodos podem ser vistos como extensões de resultados mais gerais para a estabilidade robusta de sistemas discretos variantes no tempo (Daafouz e Bernussou, 2001; Lee, 2006).

É recente o estudo do problema de filtragem no contexto de sistemas nebulosos T-S discretos no tempo, tendo sido investigado principalmente considerando o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ . Abordagens baseadas em matrizes polinomiais homogêneas (Zhang et al., 2011) ou em variáveis dependentes de parâmetros (Zhang e Xia, 2009; Zhang et al., 2012) têm sido utilizadas.

Este artigo investiga o problema do projeto de filtros nebulosos com critério de desempenho \mathcal{H}_2 para sistemas nebulosos T-S discretos no tempo. Assume-se que as taxas de variação das funções de pertinência são arbitrárias. As condições de projeto são formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares dependentes de parâmetros e a estabilidade do sistema T-S em malha fechada é assegurada por funções de Lyapunov afins dependentes de dois instantes sucessivos de tempo. O filtro nebuloso T-S e as variáveis de folga dependentes de parâmetros são tratados como polinômios homogêneos de grau arbitrário das funções de pertinência. Testes numéricos aplicados em exemplos retirados da literatura ilustram o melhor desempenho dos filtros nebulosos projetados pelo método proposto quando comparados com filtros robustos (independente das variáveis premissas).

O artigo é organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta os resultados preliminares. Os resultados principais são apresentados na Seção 3. A Seção 4 apresenta um experimento numérico que ilustra as vantagens do método proposto e a Seção 5 conclui

o artigo.

2 Resultados Preliminares

Considere a i -ésima regra do modelo nebuloso do tipo T-S (Tanaka e Wang, 2001) discreto no tempo, $i = 1, \dots, N$, dado por

\mathcal{R}_i : Se θ_{1k} é M_{i1} e ... e θ_{qk} é M_{iq}

Então

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_i x_k + B_{1i} w_k \\ z_k &= C_{1i} x_k + D_{11i} w_k \\ y_k &= C_{2i} x_k + D_{21i} w_k \end{aligned} \quad (1)$$

A variável N representa o número total de regras nebulosas, M_{ij} , $j = 1, \dots, q$, denotam conjuntos nebulosos e $\theta_k = [\theta_{1k}, \theta_{2k}, \dots, \theta_{qk}]$ o vetor de variáveis premisas. As funções de pertinência normalizadas são dadas por

$$h_i(\theta_k) = \frac{\mu_i(\theta_k)}{\sum_{i=1}^N \mu_i(\theta_k)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

em que $\mu_i(\theta_k) = \prod_{j=1}^q M_{ij}(\theta_{jk})$, sendo o termo $M_{ij}(\theta_{jk})$ o grau de pertinência de θ_{jk} em M_{ij} , e

$$0 \leq h_i(\theta_k) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^N h_i(\theta_k) = 1 \quad (3)$$

com $h_i(\theta_k) \in \Lambda_N$, $\forall k \geq 0$ e Λ_N é o simplex unitário, dado por

$$\Lambda_N = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \sigma_i = 1, \sigma_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\} \quad (4)$$

O sistema nebuloso T-S (1) pode ser reescrito como¹

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(h)x_k + B_1(h)w_k \\ z_k &= C_1(h)x_k + D_{11}(h)w_k \\ y_k &= C_2(h)x_k + D_{21}(h)w_k \end{aligned} \quad (5)$$

sendo que

$$\begin{aligned} &(A(h), B_1(h), C_1(h), D_{11}(h), C_2(h), D_{21}(h)) \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(\theta_k) (A_i, B_{1i}, C_{1i}, D_{11i}, C_{2i}, D_{21i}) \end{aligned} \quad (6)$$

com

$$A(h) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_1(h) \in \mathbb{R}^{n \times r}, C_1(h) \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

$$D_{11}(h) \in \mathbb{R}^{p \times r}, C_2(h) \in \mathbb{R}^{q \times n} \text{ e } D_{21}(h) \in \mathbb{R}^{q \times r}$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, $w_k \in \mathbb{R}^r$ uma entrada externa, $z_k \in \mathbb{R}^p$ a saída de referência e $y_k \in \mathbb{R}^q$ a saída medida.

As taxas de variações das funções de pertinência são consideradas como arbitrárias, implicando que $h(\theta_{k+1})$ é independente de $h(\theta_k)$, e que $h(\cdot)$ pode variar de maneira arbitrariamente rápida dentro do simplex unitário.

¹Por simplicidade de notação, a dependência explícita em θ_k é omitida em $h(\theta_k)$.

O objetivo é encontrar um filtro nebuloso T-S de ordem completa dado por

$$\begin{aligned} x_{f_{k+1}} &= A_f(h)x_{f_k} + B_f(h)y_k \\ z_{f_k} &= C_f(h)x_{f_k} + D_f(h)y_k \end{aligned} \quad (7)$$

sendo que $x_{f_k} \in \mathbb{R}^{n_f}$, $n_f = n$, é o vetor de estados do filtro e $z_{f_k} \in \mathbb{R}^p$ é o sinal estimado, tal que o sistema dinâmico associado ao erro de estimação $e_k = z_k - z_{f_k}$ seja assintoticamente estável e a norma \mathcal{H}_2 seja minimizada. As matrizes do filtro $A_f(h)$, $B_f(h)$, $C_f(h)$ e $D_f(h)$ têm dimensões apropriadas e dependem do vetor de função de pertinência h . Definindo o sistema aumentado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{f_{k+1}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_f(h)C_2(h) & A_f(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{f_k} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_1(h) \\ B_f(h)D_{21}(h) \end{bmatrix} w_k \\ e &= [C_1(h) - D_f(h)C_2(h) \quad -C_f(h)] \begin{bmatrix} x_k \\ x_{f_k} \end{bmatrix} \\ &+ [D_{11}(h) - D_f(h)D_{21}(h)] w_k \end{aligned}$$

com $\tilde{x}'_k = [x'_k \quad x'_{f_k}]$, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}(h)\tilde{x}_k + \tilde{B}(h)w_k \\ e_k &= \tilde{C}(h)\tilde{x}_k + \tilde{D}(h)w_k \end{aligned} \quad (8)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{A}(h) &= \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_f(h)C_2(h) & A_f(h) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \\ \tilde{B}(h) &= \begin{bmatrix} B_1(h) \\ B_f(h)D_{21}(h) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r} \\ \tilde{C}(h) &= [C_1(h) - D_f(h)C_2(h) \quad -C_f(h)] \in \mathbb{R}^{p \times 2n} \\ \tilde{D}(h) &= [D_{11}(h) - D_f(h)D_{21}(h)] \in \mathbb{R}^{p \times r} \end{aligned} \quad (9)$$

3 Resultados Principais

Primeiramente, uma desigualdade matricial que garante a estabilidade do sistema aumentado composto pelo filtro mais o sistema T-S original, dado por (8), e um limitante para a norma \mathcal{H}_2 é apresentada em termos de matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros e variáveis de folga. Na sequência, restrições de estrutura são impostas nas variáveis de folga para possibilitar a determinação do filtro \mathcal{H}_2 em termos de LMIs.

No Lema apresentado a seguir, $P(h) = P(h(\theta_k))$ é a matriz de Lyapunov associada ao instante k , enquanto $P(h^+) = P(h(\theta_{k+1}))$ é a matriz de Lyapunov associada ao instante $k+1$.

Lema 1 *O sistema discreto (8) é assintoticamente estável com custo garantido \mathcal{H}_2 dado por $\rho > 0$ se existirem matrizes definidas positivas $P(h) = P(h)' \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e matrizes $E(h) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K(h) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$,*

$Q(h) \in \mathbb{R}^{r \times 2n}$ e uma matriz simétrica $M(h) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ dependente de parâmetros tais que²

$$\text{Tr}(M(h)) < \rho^2, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} M(h) & \tilde{C}(h) \\ \star & W(h) \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

$$\Psi(h) + \Theta(h) > 0, \quad \forall h \in \Lambda_N \quad (12)$$

com

$$\Theta(h) = \text{diag}\left(W(h^+), -W(h), \mathbf{I}_r\right) \quad (13)$$

e

$$\Psi(h) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(h)'K(h)' + K(h)\tilde{A}(h) \\ E(h)\tilde{A}(h) - K(h)' \\ \tilde{B}(h)'K(h)' + Q(h)\tilde{A}(h) \\ \star \\ -E(h) - E(h)' \\ \tilde{B}(h)'E(h)' - Q(h) \\ \star \\ \star \\ Q(h)\tilde{B}(h) + \tilde{B}(h)'Q(h)' \end{bmatrix} \quad (14)$$

Prova: Aplicando o complemento de Schur em (11) tem-se $M(h) > \tilde{C}(h)W(h)^{-1}\tilde{C}(h)'$, e a desigualdade (10) garante que $\rho^2 > \text{Tr}(M(h))$, $\forall h \in \Lambda_N$.

Supondo que (12) é satisfeito, multiplicando por T pela esquerda e por T' pela direita, com

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}(h)' & 0_{2n \times r} \\ 0_{r \times 2n} & \tilde{B}(h)' & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (15)$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} W(h^+) - \tilde{A}(h)'W(h)\tilde{A}(h) & -\tilde{A}(h)'W(h)\tilde{B}(h) \\ \star & \mathbf{I}_r - \tilde{B}(h)'W(h)\tilde{B}(h) \end{bmatrix} > 0$$

Aplicando o complemento de Schur e rearranjando os blocos, tem-se

$$\begin{bmatrix} W(h^+) & \tilde{A}(h)'W(h) & 0 \\ \star & W(h) & W(h)\tilde{B}(h) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} > 0$$

ou

$$T' \begin{bmatrix} W(h^+)^{-1} & W(h)^{-1}\tilde{A}(h)' & 0 \\ \star & W(h)^{-1} & \tilde{B}(h) \\ \star & \star & I \end{bmatrix} T > 0$$

com $T = \text{diag}(W(h^+), W(h), I)$, implicando (pelo complemento de Schur) que $\tilde{A}(h)P(h)\tilde{A}(h)' - P(h^+) + \tilde{B}(h)\tilde{B}(h)' < 0$ é verificada com $P(h) = W(h)^{-1}$. ■

O Lema 1 apresenta uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do sistema (8), garantindo um limitante ρ para o critério de desempenho \mathcal{H}_2 . Como os parâmetros podem variar arbitrariamente, $h(\theta_k)$ pode ser considerado como independente de $h(\theta_{k+1})$. Além disso, como discutido em (Daafouz e

Bernussou, 2001), neste caso, $W(\cdot)$ pode ser restrita a uma estrutura afim nos parâmetros, i.e.,

$$W(h) = \sum_{i=1}^N h_i W_i, \quad W(h^+) = \sum_{i=1}^N h_i^+ W_i, \quad h, h^+ \in \Lambda_N \quad (16)$$

As matrizes do filtro nebuloso T-S aparecem nas desigualdades em uma forma não linear. Para linearizar as desigualdades do Lema 1 de modo que as variáveis de projeto do filtro possam ser obtidas diretamente por mudanças de variáveis convencionais, uma estrutura particular (Duan et al., 2006; Gao et al., 2008; Lacerda et al., 2011c) é imposta às matrizes $K(h)$, $E(h)$ e $Q(h)$, dada por:

$$K(h) = \begin{bmatrix} K_{11}(h) & \lambda_1 \hat{K} \\ K_{21}(h) & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}, \quad E(h) = \begin{bmatrix} E_{11}(h) & \hat{K} \\ E_{21}(h) & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$Q(h) = [Q_1(h) \quad 0]$$

sendo que $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz a ser determinada para o cálculo do filtro e λ_1 e λ_2 são escalares arbitrários. Além disso, por conveniência, a matriz W é particionada em blocos $n \times n$ como segue

$$W(h) = \begin{bmatrix} W_{11}(h) & W_{12}(h) \\ W_{12}(h)' & W_{22}(h) \end{bmatrix} \quad (18)$$

e adotam-se as seguintes mudanças de variáveis

$$K_1(h) = \hat{K}A_f(h), \quad K_2(h) = \hat{K}B_f(h)$$

Com essa escolha particular para as variáveis de decisão, condições LMI dependentes de parâmetros que são suficientes para assegurar uma solução do Lema 1 podem ser obtidas de forma que as matrizes do filtro dependente de parâmetros $A_f(h)$, $B_f(h)$, $C_f(h)$ e $D_f(h)$ possam ser recuperadas. O Teorema a seguir expressa uma condição suficiente para que exista uma solução para o Lema 1.

Teorema 1 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W(h)$ particionada como em (18), matrizes dependentes de parâmetros $Q(h)$, $K(h)$, $E(h)$ como em (17), $M(h) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $K_1(h) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2(h) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f(h) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\rho > 0$ e escalares λ_1, λ_2 tais que as LMIs (22) (topo da próxima página),*

$$\min_{\rho} \text{Tr}(M(h)) < \rho^2, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} M(h) & C_1(h) - D_f(h)C_2(h) & -C_f(h) \\ \star & W_{11}(h) & W_{12}(h) \\ \star & \star & W_{22}(h) \end{bmatrix} > 0, \quad (20)$$

sejam verificadas, então

$$A_f(h) = \hat{K}^{-1}K_1(h), \quad B_f(h) = \hat{K}^{-1}K_2(h), \quad C_f(h), D_f(h) \quad (21)$$

são as matrizes do filtro nebuloso T-S que asseguram que a função de transferência de w para e é estável, com um custo garantido \mathcal{H}_2 dado por ρ .

²O símbolo \star indica blocos simétricos.

$$\left[\begin{array}{cc}
W_{11}(h^+) + K_{11}(h)A(h) + A(h)'K_{11}(h)' & W_{12}(h^+) + A(h)'K_{21}(h)' \\
+ \lambda_1(C_2(h)'K_2(h)' + K_2(h)C_2(h)) & + \lambda_2C_2(h)'K_2(h)' + \lambda_1K_1(h) \\
* & W_{22}(h^+) + \lambda_2(K_1(h) + K_1(h)') \\
* & * \\
* & * \\
* & * \\
-K_{11}(h) + A(h)'E_{11}(h)' + C_2(h)'K_2(h)' & -\lambda_1\hat{K} + A(h)'E_{21}(h)' + C_2(h)'K_2(h)' \\
-K_{21}(h) + K_1(h)' & -\lambda_2\hat{K} + K_1(h)' \\
-W_{11}(h) - E_{11}(h) - E_{11}(h)' & -W_{12}(h) - \hat{K} - E_{21}(h)' \\
* & -W_{22}(h) - \hat{K} - \hat{K}' \\
* & * \\
K_{11}(h)B_1(h) + \lambda_1K_2(h)D_{21}(h) + A(h)'Q_1(h)' & \\
K_{21}(h)B_1(h) + \lambda_2K_2(h)D_{21}(h) & \\
E_{11}(h)B_1(h) + K_2(h)D_{21}(h) - Q_1(h)' & \\
E_{21}(h)B_1(h) + K_2(h)D_{21}(h) & \\
Q_1(h)B_1(h) + B_1(h)'Q_1(h)' + \mathbf{I}_r &
\end{array} \right] > 0 \quad (22)$$

Prova: Similar à prova do Lema 1. Se (19), (20) e (22), são satisfeitas com as variáveis de folga como em (17), e com W particionada como em (18), as matrizes do filtro com critério de desempenho \mathcal{H}_2 são dadas por (21). ■

3.1 Condições LMI

O Teorema 1 apresenta uma condição baseada em LMIs dependentes de parâmetros para a existência do filtro nebuloso T-S com critério \mathcal{H}_2 . Para obter relações LMIs que forneçam uma solução, é necessário arbitrar uma estrutura para as matrizes dependentes de parâmetros que são variáveis de decisão do problema.

Neste trabalho optou-se por estruturas polinômiais de grau genérico, como apresentado em (Oliveira e Peres, 2007) para as matrizes $K_{11}(h)$, $K_{21}(h)$, $E_{11}(h)$, $E_{21}(h)$, $Q_1(h)$, $K_1(h)$, $K_2(h)$, $C_f(h)$ e $D_f(h)$. Essa escolha possibilita resultados menos conservadores, ao preço de uma maior complexidade. As condições LMI finitas foram obtidas com o ROLMIP *Robust LMI Parser* (Agulhari et al., 2012), um toolbox disponível em <http://www.dt.fee.unicamp.br/~agulhari/rolmip/rolmip.htm>. Note que um filtro independente das variáveis premissas pode ser obtido fixando o grau $g = 0$ nas matrizes $K_1(h)$, $K_2(h)$, $C_f(h)$ e $D_f(h)$ (i.e., impondo que essas matrizes sejam constantes).

4 Experimento Numérico

Todos os experimentos foram implementados em Matlab versão 7.1.0.246 (R14) SP 3 usando os programas Yalmip (Löfberg, 2004) e SeDuMi (Sturm, 1999). O computador utilizado foi um Intel Quad Core, 3.00 GHz, 4 GB de RAM com sistema Operacional Windows Vista. Nos exemplos apresentados, utilizou-se para os parâmetros de busca $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Procedimentos de busca linear para a escolha dos escalares que aparecem nas condições LMI poderiam melhorar

os resultados, ao custo de maior esforço computacional, porém neste trabalho optou-se por escolhas simples. Todas as variáveis dependentes de parâmetros nas condições foram consideradas como matrizes polinômiais homogêneas de mesmo grau g . Diferentes graus poderiam ser usados, gerando LMIs de complexidades e níveis de conservadorismo distintos.

Exemplo 1

Considere o seguinte sistema nebuloso T-S discreto no tempo, estudado também em (Zhang et al., 2012) com $N = 2$ e matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.35 \\ 0.42 & 0.07 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.792 & -0.432 \\ -0.36 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.004 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_{21} = [1.71 \quad 2.85], C_{22} = [-1.9 \quad 2.28],$$

$$C_{11} = [0.81 \quad 0.27], C_{12} = [0.4 \quad 1.2],$$

$$D_{211} = D_{212} = [0.005]$$

em que x_{1k} é o primeiro estado do sistema e

$$M_{11} = \begin{cases} \left| \frac{\text{sen}(x_{1k})}{x_{1k}} \right|, & \text{para } x_{1k} \neq 0 \\ 1, & \text{para } x_{1k} = 0 \end{cases}$$

$$M_{21} = 1 - M_{11}$$

Aplicando o Teorema 1, é possível obter um filtro de grau $g = 1$ estritamente próprio ($D_f(h) = 0$), com custo garantido \mathcal{H}_2 dado por $\rho = 0.152$. As matrizes do filtro obtido são dadas por

$$A_{f1} = \begin{bmatrix} 0.922 & 0.016 \\ -0.375 & -0.002 \end{bmatrix}, A_{f2} = \begin{bmatrix} 0.839 & -0.228 \\ -0.341 & -0.080 \end{bmatrix},$$

$$B_{f1} = \begin{bmatrix} -0.142 \\ 0.034 \end{bmatrix}, B_{f2} = \begin{bmatrix} 0.027 \\ -0.016 \end{bmatrix},$$

$$C_{f1} = [-0.358 \quad -0.048], C_{f2} = [-0.081 \quad -0.300]$$

Um filtro independente das variáveis premissas, estritamente próprio, pode ser obtido para este exemplo utilizando o Teorema 1, considerando $g = 0$. Neste caso, o custo garantido \mathcal{H}_2 obtido é $\rho = 0.181$. O filtro correspondente é dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} 1.027 & 0.251 \\ -0.489 & -0.246 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.015 \\ 0.045 \end{bmatrix}, \\ C_f = [-0.2078 \quad -0.064],$$

A Figura 1 apresenta a resposta temporal do sistema aumentado (8) obtida com um filtro independente das variáveis premissas (curva azul pontilhada) e com o filtro nebuloso (curva preta contínua) obtidos pelo Teorema 1. É possível observar que o erro e_k obtido pelo filtro nebuloso é menor em amplitude e além disso converge para zero mais rapidamente.

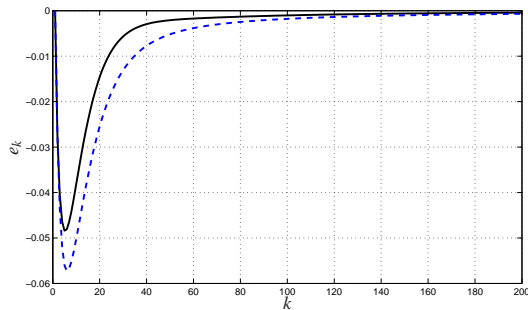


Figura 1: Análise temporal do erro e_k para o sistema aumentado (8) obtida com um filtro independente das variáveis premissas (curva azul pontilhada) e com um filtro nebuloso T-S (curva preta contínua).

5 Conclusão

Foram propostas novas condições LMIs dependentes de parâmetros para o projeto de um filtro de ordem completa nebuloso T-S com critério \mathcal{H}_2 para sistemas nebulosos T-S discretos no tempo. Relaxações baseadas em polinômios homogêneos de grau genérico provêm resultados menos conservadores quando comparados com outras técnicas existentes. Como extensões para trabalhos futuros, os autores estão investigando como incorporar limitantes na taxa de variação dos parâmetros variantes no tempo nas condições LMI.

Agradecimentos

Às agências FAPESP (Processo nº 2010/10118-0), CNPq e Capes pelo apoio financeiro.

Referências

Agulhari, C. M., de Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2012). Robust LMI Parser: a computational package to construct LMI conditions for

uncertain systems, *XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)*, Campina Grande, PB, Brazil, pp. 2298–2305.

Barbosa, K. A., de Souza, C. E. e Trofino, A. (2005). Robust \mathcal{H}_2 filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions, *Systems & Control Letters* **54**(3): 251–262.

Borges, R. A., Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F., Peres, P. L. D. e Bliman, P.-A. (2008). Parameter-dependent \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains, *Signal Processing* **88**(7): 1801–1816.

Borges, R. A., Oliveira, R. C. L. F., Abdallah, C. T. e Peres, P. L. D. (2010). \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time linear systems with bounded time-varying parameters, *Signal Processing* **90**(1): 282–291.

Daafouz, J. e Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties, *Systems & Control Letters* **43**(5): 355–359.

de Souza, C. E., Barbosa, K. A. e Trofino, A. (2007). Robust filtering for linear systems with convex-bounded uncertain time-varying parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(6): 1132–1138.

de Souza, C. E. e Trofino, A. (2000). A linear matrix inequality approach to the design of robust \mathcal{H}_2 filters, in L. El Ghaoui e S. I. Niculescu (eds), *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, Advances in Design and Control, SIAM, Philadelphia, PA, pp. 175–185.

Duan, Z. S., Zhang, J. X., Zhang, C. S. e Mosca, E. (2006). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems, *Automatica* **42**(11): 1919–1926.

Gao, H., Meng, X. e Chen, T. (2008). A new design of robust H_2 filters for uncertain systems, *Systems & Control Letters* **57**(7): 585–593.

Geromel, J. C. (1999). Optimal linear filtering under parameter uncertainty, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(1): 168–175.

Geromel, J. C., Bernussou, J., Garcia, G. e de Oliveira, M. C. (2000). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **38**(5): 1353–1368.

Geromel, J. C. e de Oliveira, M. C. (2001). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(1): 100–107.

- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011a). Filtragem \mathcal{H}_2 dependente de parâmetros para sistemas lineares contínuos com parâmetros variantes no tempo, *Anais do X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, São João del-Rei, MG, Brasil, pp. 701–706.
- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011b). \mathcal{H}_∞ parameter-dependent filter design for arbitrarily time-varying LPV systems, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, pp. 7927–7932.
- Lacerda, M. J., Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2011c). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices, *Signal Processing* **91**(5): 1115–1122.
- Lee, J.-W. (2006). On uniform stabilization of discrete-time linear parameter-varying control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(10): 1714–1721.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2007). Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(7): 1334–1340.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11**(1–4): 625–653. <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>.
- Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **SMC-15**(1): 116–132.
- Tanaka, K. e Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, John Wiley & Sons, New York, NY.
- Xie, L., Lu, L., Zhang, D. e Zhang, H. (2004). Improved robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems, *Automatica* **40**(5): 873–880.
- Zhang, H., Shi, Y. e Mehr, A. S. (2012). On \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time takagi-sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **20**(2): 396–401.
- Zhang, H., Xie, X. e Tong, S. (2011). Homogeneous polynomially parameter-dependent \mathcal{H}_∞ filter designs of discrete-time fuzzy systems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics* **41**(5): 1313–1322.
- Zhang, J. e Xia, Y. (2009). New LMI approach to fuzzy \mathcal{H}_∞ filter designs, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* **56**(9): 739–743.