

PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO ROBUSTO PARA SISTEMAS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

WALLYSONN ALVES DE SOUZA*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA†, MÁIRA PERES ALVES SANTIM†, RODRIGO CARDIM†, EDVALDO ASSUNÇÃO†, ALEXANDRE ATAIDE CARNIATO‡

*IFG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Departamento das Áreas Acadêmicas de Jataí - Campus Jataí
Rua Riachuelo, 2090, 75804-020, Jataí, Goiás, Brasil

†UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

‡IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Departamento de Indústria de Presidente Epitácio - Campus Presidente Epitácio
Av: José Ramos Junior 27-50, 19470-000, Presidente Epitácio, São Paulo, Brasil

Emails: wallysonn@yahoo.com.br, marcelo@dee.feis.unesp.br, mairaalves28@yahoo.com.br, rcardim@dee.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, carniato@ifsp.edu.br

Abstract— The paper proposes a new switched control design method for some classes of uncertain nonlinear plants described by Takagi-Sugeno fuzzy models. This method uses a quadratic Lyapunov function to design the feedback controller gains based on Linear Matrix Inequalities (LMIs). The controller gain is chosen by a switching law that returns the smallest value of the time derivative of the Lyapunov function. The proposed methodology eliminates the need of finding the membership function expressions, that can be complicated or can be also depend on the plant uncertainties, to implement of the control law. The control design of a ball-and-beam system and of a magnetic levitator illustrates the procedure.

Keywords— Switched control, Control of uncertain nonlinear systems, LMI, Takagi-Sugeno fuzzy model.

Resumo— O trabalho propõe um novo método de controle chaveado para algumas classes de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Este método é baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e utiliza uma função de Lyapunov quadrática para projetar os ganhos de realimentação do controlador. O controle proposto escolhe um ganho, em um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento que retorna menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática. A metodologia proposta elimina a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência, que podem ser complicadas ou dependerem das incertezas da planta, para a implementação da lei de controle. O projeto de controle de um sistema bola viga e de um levitador magnético ilustram o procedimento.

Palavras-chave— Controle chaveado, Controle de sistemas não linear incerto, LMI, Modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

1 Introdução

Nos últimos anos tem crescido muito o interesse no estudo de sistemas não lineares chaveados e, este interesse, pode ser notado observando-se o crescente número de artigos que foram publicados sobre sistemas fuzzy Takagi-Sugeno chaveados. Em geral, esses estudos utilizam regras de chaveamento baseadas em regiões que dependem das variáveis premissas e/ou funções de pertinência e/ou variáveis de estado, como pode ser visto em (Tanaka et al., 2000; Feng, 2004; Arrifano et al., 2006; Dong and Yang, 2008; Yan and Sun, 2010; Yang and Dong, 2010; Jabri et al., 2012).

Neste trabalho será proposto um novo método de controle chaveado para algumas classes de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Esta nova lei de controle, que também depende das variáveis de estado, generaliza os resultados apresentados em (Souza et al., 2013), que considerou apenas plantas lineares. O controle proposto escolhe um ganho, em

um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento que retorna menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática. A metodologia proposta permite projetar um conjunto de ganhos, baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e na compensação distribuída paralela, como proposto, por exemplo, em (Tanaka et al., 1998; Taniguchi et al., 2001; Teixeira et al., 2003; Montagner et al., 2009; Klug et al., 2011).

A principal vantagem deste novo procedimento é a sua aplicação prática, pois elimina a necessidade de encontrar as expressões explícitas das funções de pertinência, que muitas vezes podem ter expressões longas e/ou complexas, ou podem não serem conhecidas por terem incertezas. Além disso, com a metodologia proposta os sistemas, em malha fechada, geralmente apresentam um tempo de estabelecimento menor do que aqueles obtidos com os controladores fuzzy, não chaveado, e amplamente utilizado na literatura. A metodologia também permite o acréscimo de índices de desem-

penho, tais como taxa de decaimento e restrições na entrada da planta e na saída, que podem ser adicionados ao processo de projeto de controle.

Resultados de simulação do controle de um sistema bola-viga e de um levitador magnético ilustram a metodologia proposta. As implementações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem de modelagem YALMIP (Lofberg, 2004) com o solver SeDuMi (Sturm, 1999).

Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas no trabalho:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}; \quad x(t) = x; \\ V(x) &= V; \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \\ (A, B, C, K)(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, B_i, C_i, K_i), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $r = 2^s$ e s é o número de funções não lineares distintas na planta.

2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno e Resultados de Estabilidade

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno é descrito por regras SE-ENTÃO que representam localmente as relações de entrada e saída de um sistema não linear. Assim, como descrito em (Takagi and Sugeno, 1985) o modelo fuzzy Takagi-Sugeno é da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \text{ SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, M_j^i , $j \in \mathbb{K}_p$, é o conjunto fuzzy j da regra i , $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $z_1(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas, que nesse artigo serão as variáveis de estado.

De (Tanaka et al., 1998), $\dot{x}(t)$ dado em (2) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (3)$$

sendo $\alpha_i(x(t))$, dado em (1), o peso normalizado, de cada subsistema $A_i x(t) + B_i u(t)$, para $i \in \mathbb{K}_r$.

Considerando que o vetor de estado $x(t)$ esteja disponível, do modelo fuzzy (2), os reguladores fuzzy via compensação distribuída paralela possuem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \text{ SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{ENTÃO } u(t) = -K_i x(t). \end{aligned} \quad (4)$$

De forma análoga à obtenção de (3), pode-se concluir que

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) K_i x(t). \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) em (3) e lembrando que $\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1$, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x(t)) \alpha_j(x(t)) [A_i - B_i K_j] x(t). \quad (6)$$

O Corolário a seguir, estabelece condições baseadas em LMIs que garantem a estabilidade assintótica global do sistema (6).

Corolário 1 (Tanaka et al., 1998) *Se $B_i = B$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema de controle fuzzy contínuo no tempo dado em (6) é globalmente assintoticamente estável se existem uma matriz simétrica positiva definida X e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:*

$$X A_i^T + A_i X - B M_i - M_i^T B^T \prec 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (7)$$

Se (7) são factíveis, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Observação 1 *Neste trabalho, por simplicidade, o novo método de projeto dos ganhos do controlador foi baseado no Corolário 1. No entanto, a metodologia proposta não exclui a utilização de outros métodos de projeto de controle relaxados, também baseados em LMIs, para plantas descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, como aqueles apresentados, por exemplo, em (Taniguchi et al., 2001; Teixeira et al., 2003; Montagner et al., 2009).*

3 Resultados Principais

Nesta seção é proposto o projeto de um controlador chaveado para o sistema fuzzy Takagi-Sugeno (3).

3.1 Caso 1: Sistema Fuzzy com uma Matriz Constante $B(\alpha) = B$

Neste caso, será considerado que $B(\alpha) = B$ é uma matriz de elementos constantes, isto é,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t). \quad (8)$$

Suponha que as LMIs (7) sejam factíveis e sejam $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador dado em (5) e $P = X^{-1}$ obtidos das condições do Corolário 1. Então, define-se o controlador chaveado

$$u(t) = u_\sigma = -K_\sigma x, \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} (-x^T P B K_i x). \quad (9)$$

Portanto, de (1), o sistema controlado (8) e (9) pode ser escrito como segue:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i [A_i - B K_\sigma] x(t). \quad (10)$$

Teorema 1 *Suponha que as condições do Corolário 1, relativas ao sistema (8) com a lei de controle (5), sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada (9) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (8), globalmente assintoticamente estável.*

Prova: Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T P x$. Defina \dot{V}_{u_α} e \dot{V}_{u_σ} a derivada temporal de V para o sistema (8), com a lei de controle (5) e (9), respectivamente. Então, de (10),

$$\begin{aligned}\dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T P \dot{x} = 2x^T P(A(\alpha)x + Bu_\sigma) \\ &= 2x^T P A(\alpha)x + 2x^T P B(-K_\sigma)x.\end{aligned}\quad (11)$$

Assim, note que de (1) e (9),

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T P B(-K_i)x\} \leq x^T P B \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) x.$$

Portanto, de (11) e das leis dadas em (9) e (5) observa-se que

$$\begin{aligned}\dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T P A(\alpha)x + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T P B(-K_i)x\} \\ &\leq 2x^T P A(\alpha)x + 2x^T P B \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) x \\ &= 2x^T P (A(\alpha) - BK(\alpha))x \\ &= 2x^T P (A(\alpha)x + Bu_\alpha) = \dot{V}_{u_\alpha}.\end{aligned}$$

Então, $\dot{V}_{u_\sigma} \leq \dot{V}_{u_\alpha}$ e como, do Corolário 1, $\dot{V}_{u_\alpha} < 0$ para $x \neq 0$, a prova é concluída. \square

Observação 2 *O Teorema 1 mostra que, se as condições do Corolário 1 forem satisfeitas, então $\dot{V}_{u_\sigma}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, assegurando que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado (8) e (9) seja globalmente assintoticamente estável. Assim, o Corolário 1 pode ser utilizado para projetar os ganhos K_1, K_2, \dots, K_r e a matriz $P = X^{-1}$ da lei de controle chaveada (9). Além disso, note que a lei de controle chaveada (9) não utiliza as funções de pertinência α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, que podem apresentar expressões complicadas para implementações práticas ou dependerem de incertezas da planta e que seriam necessárias para implementar a lei de controle (5). Assim, a lei de controle proposta pode oferecer uma alternativa relativamente simples para a implementação do controlador.*

3.2 Caso 2: Sistema Fuzzy com Não Linearidades na Matriz $B(\alpha)$

Neste caso, será considerado um sistema fuzzy como em (3), com α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, definido em (1):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \hat{A}(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{A}_i, \quad \hat{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{B}_i.\end{aligned}\quad (12)$$

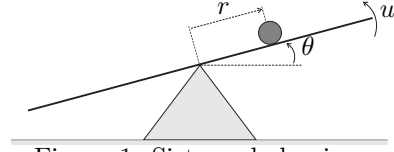


Figura 1: Sistema bola-viga.

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u \in \mathbb{R}^m$. Defina x_{n+l} e v_l , tais que $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l \in \mathbb{K}_m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = v_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) = v_m, \end{cases}\quad (13)$$

ou equivalentemente (Barmish, 1983),

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bv(t),\quad (14)$$

sendo

$$x = [\hat{x}^T \ x_{n+1} \ \dots \ x_{n+m}]^T,$$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha) & \hat{B}(\alpha) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Das considerações anteriores, nota-se que o sistema (14) é similar ao sistema (8), e portanto, o problema cai no Caso 1. Assim, pode-se adotar o procedimento estabelecido no Caso 1 para projetar uma lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n+m}$.

4 Exemplos

4.1 Exemplo do Caso 1

Para ilustrar este caso, será projetado o sistema de controle de um sistema bola viga, ilustrado na Figura 1, cujo modelo matemático é dado por (Wang, 1997, p. 217):

$$\ddot{r} = \beta r(t)\dot{\theta}^2(t) - \beta g \text{sen}(\theta(t)), \quad \ddot{\theta}(t) = u(t),\quad (15)$$

sendo: r a posição da bola; θ o ângulo da viga em relação ao solo; u o sinal de controle; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ e $\beta = mr^2/(J_b + mr^2)$ é um parâmetro incerto do sistema que depende da massa m , do raio r e do momento de inércia J_b da bola.

Defina as variáveis de estado $x_1 = r(t)$, $x_2 = \dot{r}(t)$, $x_3 = \theta(t)$ e $x_4 = \dot{\theta}(t)$. Então, considerando o vetor de estado $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, o sistema (15) pode ser escrito como segue:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{23}(x, \beta) & f_{24}(x, \beta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,\quad (16)$$

$$f_{23}(x, \beta) = -\frac{\beta g \text{sen}(x_3)}{x_3}, \quad f_{24}(x, \beta) = \beta x_1 x_4.\quad (17)$$

Observa-se que, para implementação do controle chaveado (9), os ganhos do controlador serão projetados utilizando a forma generalizada proposta em (Taniguchi et al., 2001), mas levando em conta o intervalo do parâmetro incerto α (Santim et al., 2012; Souza et al., 2013). Será considerado o seguinte domínio para o sistema (16)-(17):

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : -1 \leq x_1 \leq 1, -\frac{\pi}{12} \leq x_3 \leq \frac{\pi}{12}, \\ -2 \leq x_4 \leq 2, 0.6 \leq \beta \leq 0.8\}.$$

Feitos os cálculos, foram obtidos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_{23_1} &= \max_{(x,\beta) \in D_1} \{f_{23}(x,\beta)\} = -4.1565, \\ a_{23_2} &= \min_{(x,\beta) \in D_1} \{f_{23}(x,\beta)\} = -5.6058, \\ a_{24_1} &= \max_{(x,\beta) \in D_1} \{f_{24}(x,\beta)\} = 1.1429, \\ a_{24_2} &= \min_{(x,\beta) \in D_1} \{f_{24}(x,\beta)\} = -1.1429. \end{aligned} \quad (18)$$

Assim, as funções não lineares f_{23} e f_{24} podem ser representadas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, considerando que existem combinações convexas com as funções de pertinência $\sigma_{23_1} = \sigma_{23_1}(x,\beta)$, $\sigma_{23_2} = \sigma_{23_2}(x,\beta)$, $\xi_{24_1} = \xi_{24_1}(x,\beta)$ e $\xi_{24_2} = \xi_{24_2}(x,\beta)$ e valores constantes a_{23_1} , a_{23_2} , a_{24_1} e a_{24_2} dados em (18) tais que

$$\begin{aligned} f_{23}(x,\beta) &= \sigma_{23_1} a_{23_1} + \sigma_{23_2} a_{23_2}, \\ f_{24}(x,\beta) &= \xi_{24_1} a_{24_1} + \xi_{24_2} a_{24_2}, \end{aligned} \quad (19)$$

com

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_{23_1}, \sigma_{23_2}, \xi_{24_1}, \xi_{24_2} \leq 1, \\ \sigma_{23_1} + \sigma_{23_2} = 1, \quad \xi_{24_1} + \xi_{24_2} = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Portanto, de (19) e (20) segue que

$$\begin{aligned} \sigma_{23_1} &= \frac{f_{23} - a_{23_2}}{a_{23_1} - a_{23_2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{23_2} = 1 - \sigma_{23_1}, \\ \xi_{24_1} &= \frac{f_{24} - a_{24_2}}{a_{24_1} - a_{24_2}} \quad \text{e} \quad \xi_{24_2} = 1 - \xi_{24_1}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\xi_{24_1}(x,\beta) + \xi_{24_2}(x,\beta) = 1$ e $\sigma_{23_1}(x,\beta) + \sigma_{23_2}(x,\beta) = 1$, de (19), segue que

$$\begin{aligned} f_{23} &= \sigma_{23_1} \xi_{24_1} a_{23_1} + \sigma_{23_1} \xi_{24_2} a_{23_1} \\ &\quad + \sigma_{23_2} \xi_{24_1} a_{23_2} + \sigma_{23_2} \xi_{24_2} a_{23_2}, \\ f_{24} &= \sigma_{23_1} \xi_{24_1} b_{21_1} + \sigma_{23_1} \xi_{24_2} b_{21_2} \\ &\quad + \sigma_{23_2} \xi_{24_1} b_{21_1} + \sigma_{23_2} \xi_{24_2} b_{21_2}. \end{aligned}$$

Agora, definindo

$$\begin{aligned} \alpha_1(x,\beta) &= \sigma_{23_1} \xi_{24_1}, & \alpha_2(x,\beta) &= \sigma_{23_1} \xi_{24_2}, \\ \alpha_3(x,\beta) &= \sigma_{23_2} \xi_{24_1}, & \alpha_4(x,\beta) &= \sigma_{23_2} \xi_{24_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

como sendo as funções de pertinência do sistema (16)-(17), seus modelos locais são:

$$[A_1|A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23_1} & a_{24_1} & 0 & 0 & a_{23_1} & a_{24_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

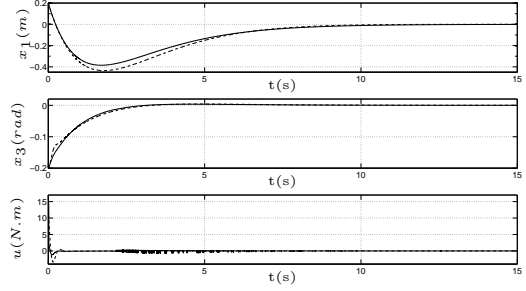


Figura 2: Posição, posição angular e sinal de controle sistema bola-viga (16) utilizando o controlador chaveado (9) (linha contínua) e o controlador fuzzy (5) (linha pontilhada), considerando a condição inicial $x(0) = [0.2 \ -1 \ -0.2 \ 0]^T$ e $\beta = 0.7$.

$$[A_3|A_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23_2} & a_{24_2} & 0 & 0 & a_{23_2} & a_{24_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

Assim, utilizando as LMIs (7) do Corolário 1, obtém-se os seguintes ganhos do controlador e matriz simétrica positiva definida:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-15.9716 \quad -32.6257 \quad 230.9300 \quad 18.0795], \\ K_2 &= [-25.4793 \quad -60.7573 \quad 345.5506 \quad 27.4157], \\ K_3 &= [-15.5242 \quad -31.3018 \quad 225.5359 \quad 17.6401], \\ K_4 &= [-25.0319 \quad -59.4334 \quad 340.1565 \quad 26.9764], \\ P &= \begin{bmatrix} 1.1002 & 1.6512 & -8.6958 & -0.6781 \\ 1.6512 & 4.8855 & -19.9056 & -1.6214 \\ -8.6958 & -19.9056 & 119.7348 & 9.4154 \\ -0.6781 & -1.6214 & 9.4154 & 1.1397 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

O objetivo da simulação é manter a bola na origem. Considerando $\alpha = 0.7$, a condição inicial $x_0 = [0.2 \ -1 \ -0.2 \ 0]^T$ e o ponto de equilíbrio $x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, a simulação do sistema controlado (16),(17), (9), (22) e (16),(17), (5), (22) apresentou a resposta ilustrada na Figura 2.

Vale observar que os ganhos foram obtidos utilizando a forma generalizada proposta em (Taniguchi et al., 2001). Contudo, o controlador chaveado u_σ dado em (9) não utiliza as funções de pertinência (como em (5)) e, portanto, não é necessário encontrar e implementar tais funções. Assim, uma vantagem desta nova metodologia é que pode-se eliminar todas as etapas do projeto dadas em (19)-(21) que são necessárias para encontrar as funções de pertinência, e que às vezes podem ter expressões longas e/ou complexas ou serem incertas, como é o caso deste exemplo.

4.2 Exemplo do Caso 2

Para ilustrar este caso, será projetado o controle de um levitador magnético, cujo modelo matemático que representa a posição e a velocidade (\bar{x}_1 e \bar{x}_2 respectivamente) de uma bola pode ser dado pelo seguinte sistema (Santim et al., 2012; Souza et al., 2012a):

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \quad \dot{\bar{x}}_2 = g - \frac{k}{m} \bar{x}_2 - \frac{\lambda \mu i^2}{2m(1 + \mu \bar{x}_1)^2}, \quad (23)$$

com ponto de equilíbrio $\bar{x}_e = [\bar{x}_{1e} \ \bar{x}_{2e}]^T = [y_0 \ 0]^T$, e sendo m a massa incerta, $g = 9.8m/s^2$, $\lambda = 0.46H$, $\mu = 2m^{-1}$, $k = 0.001Ns/m$. Da segunda equação de (23), observa-se no ponto de equilíbrio, $\dot{x}_2 = 0$ e $i = i_0$, sendo $i_0^2 = \frac{2mg}{\lambda\mu}(1 + \mu y_0)^2$.

Observa-se que o ponto de equilíbrio não está na origem $[\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]^T = [0 \ 0]^T$. Assim, para a análise de estabilidade é necessária a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 - y_0, \\ x_2 = \bar{x}_2, \\ u = i^2 - i_0^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 + y_0, \\ \bar{x}_2 = x_2, \\ i^2 = u + i_0^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\bar{x}}_1, \\ \dot{x}_2 = \dot{\bar{x}}_2. \end{cases}$$

Assim, o sistema (23) pode ser escrito como segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_{21} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21} \end{bmatrix} u, \quad (24)$$

$$f_{21} = f_{21}(x_1, y_0) = \frac{g\mu(\mu x_1 + 2\mu y_0 + 2)}{(1 + \mu(x_1 + y_0))^2} \quad (25)$$

$$g_{21} = g_{21}(x_1, y_0) = \frac{-\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1 + y_0))^2}.$$

Agora, define-se x_3 e v tais que $\dot{x}_3 = \dot{u} = v$, isto é, $x_3 = u$. Assim, considerando (25), o sistema (24) pode ser dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ f_{21} & -\frac{k}{m} & g_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v. \quad (26)$$

Após este ajuste, pode-se ver que o problema recai ao Caso 1. Assim, o procedimento descrito no Caso 1 pode ser utilizado para projetar a lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^3$, como em (9).

Portanto, para encontrar os modelos locais deve-se obter os valores máximos e mínimos de funções f_{21} e g_{21} . Neste caso, será utilizada a metodologia proposta em (Santim et al., 2012). Então, supõe-se que a posição desejada pertença ao conjunto $y_0 \in [0.04, 0.11]$ e, portanto, y_0 será considerado como sendo uma nova variável para a especificação do domínio D_3 das funções não lineares f_{21} e g_{21} :

$$D_3 = \{(x_1, x_2, y_0) \in \mathbb{R}^3 : -0.11 \leq x_1 \leq 0.11, 0.04 \leq y_0 \leq 0.11\}. \quad (27)$$

Feitos os cálculos, considerando (25) e (27), foram obtidos:

$$\begin{aligned} a_{21_1} &= \max_{(x_1, y_0) \in D_3} \{f_{21}(x_1, y_0)\} = 51.4116, \\ a_{21_2} &= \min_{(x_1, y_0) \in D_3} \{f_{21}(x_1, y_0)\} = 25.1427, \\ b_{21_1} &= \max_{(x_1, y_0) \in D_3} \{g_{21}(x_1, y_0)\} = -4.4367, \\ b_{21_2} &= \min_{(x_1, y_0) \in D_3} \{g_{21}(x_1, y_0)\} = -12.4392. \end{aligned} \quad (28)$$

As funções de pertinência α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, podem ser obtidas como no exemplo anterior.

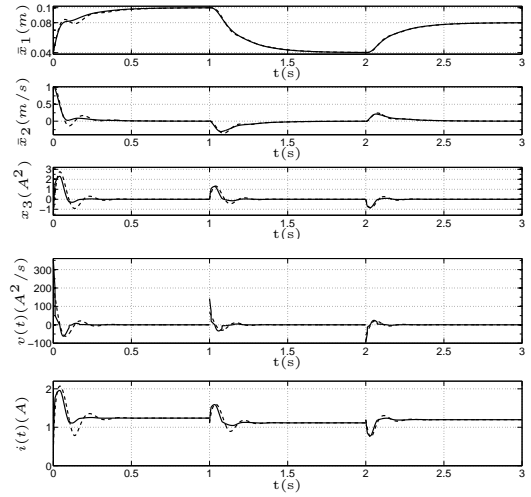


Figura 3: Variáveis de estado do levitador magnético (23) e (26), utilizando o controlador chaveado (linha contínua) e controlador fuzzy (linha pontilhada).

Portanto, considerando $a_{22} = -0.02$ e de (28), define-se os seguintes modelos locais:

$$\begin{aligned} [A_1|A_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ a_{21_1} & a_{22} & b_{21_1} & | & a_{21_1} & a_{22} & b_{21_2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [A_3|A_4] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ a_{21_2} & a_{22} & b_{21_1} & | & a_{21_2} & a_{22} & b_{21_2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 = B_2 = B_3 = B_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Utilizando as LMIs (7) do Corolário 1, os seguintes ganhos do controlador foram obtidos:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-657.7857 \quad -108.1193 \quad 15.1699], \\ K_2 &= 10^3[-2.2533 \quad -0.3741 \quad 0.0512], \\ K_3 &= [-796.3018 \quad -131.2061 \quad 18.2981], \\ K_4 &= 10^3[-2.3919 \quad -0.3971 \quad 0.0543], \quad (29) \\ P &= \begin{bmatrix} 834.7471 & 111.4282 & -19.4938 \\ 111.4282 & 18.5719 & -2.5165 \\ -19.4938 & -2.5165 & 1.0161 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para a simulação numérica, em $t = 0s$ foi considerada a condição inicial $\bar{x}(0) = [0.04 \ 1]^T$ e $y_0 = 0.1m$. Como $x_3 = u = i^2 - i_0^2$ e $i_0^2 = 1.5339A^2$ (considerando que $i^2(0) = 0$, a condição inicial para o sistema (26) é $x_0 = [0.04 \ 1 \ 0]^T - [0.1 \ 0 \ 1.5339]^T = [-0.06 \ 1 \ -1.5339]^T$, ou seja, $x_3(0) = -1.5339$). Em $t = 1s$, da Figura 3 observa-se que o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}(1) = [\bar{x}_1(1) \ \bar{x}_2(1)]^T = [0.1 \ 0]^T$ e $x_3(1) = 0$. Mudando y_0 de $0.1m$ para $0.04m$ pode-se ver que, em $t = 2s$, o sistema está praticamente em regime no ponto $\bar{x}(2) = [0.04 \ 0]^T$ e $x_3(2) = 0$, que será a nova condição inicial. Finalmente, para $t \geq 2s$, muda-se y_0 de $0.04m$ para $0.08m$. Assim, como mostra a Figura 3, $\bar{x}(\infty) = [0.08 \ 0]$ e $x_3(\infty) = 0$. A Figura 3, ilustra a resposta do sistema.

5 Conclusões

Neste trabalho foi proposto um novo método de projeto de controle chaveado para algumas classes de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-sugeno. Este método elimina a necessidade de obter as expressões explícitas das funções de pertinência, para implementar a lei de controle, podendo assim, ser implementado mesmo quando a planta é incerta. Além disso, permite o uso das LMIs utilizadas em métodos de projeto baseado na compensação distribuída paralela.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Arrifano, N. S. D., Oliveira, V. A. and Cossi, L. V. (2006). Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* **17**: 213–225.
- Barmish, B. (1983). Stabilization of uncertain systems via linear control, *IEEE Trans. Autom. Control* **28**(8): 848 – 850.
- Dong, J. and Yang, G.-H. (2008). State feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via switched fuzzy controllers, *Information Sciences* **178**(6): 1680–1695.
- Feng, G. (2004). \mathcal{H}_∞ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **34**(1): 283–292.
- Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., Jaadari, A. and Duong, C. C. (2012). Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law, *J. Control Engineering and Appl. Informatics* **14**(2): 40–49.
- Klug, M., Castelan, E. B. and Leite, V. J. S. (2011). A dynamic compensator for parameter-varying systems subject to actuator limitations applied to a T-S fuzzy system, *18th IFAC World Congress*, Vol. 18, Milan, Italy, pp. 14495–14500.
- Lofberg, J. (2004). YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *2004 IEEE Int. Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284 –289.
- Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2009). Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and \mathcal{H}_∞ control of takagi-sugeno fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **17**(4): 863–873.
- Santim, M. P. A., Teixeira, M. C. M., Souza, W. A., Assunção, E. and Cardim, R. (2012). Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points, *Mathematical Problems in Engineering* **2012**: 17.
- Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Santim, M. P. A., Cardim, R. and Assunção, E. (2013). On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties, *Mathematical Problems in Engineering* **2013**: 10.
- Souza, W., Alves, M. P., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and Assunção, E. (2012a). Projeto de reguladores fuzzy Takagi-Sugeno com rastreamento em uma região de operação, *Anais - XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Campina Grande, PB.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MAT-LAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, **6**(2): 250–265.
- Tanaka, K., Iwasaki, M. and Wang, H. O. (2000). Stable switching fuzzy control and its application to a hovercraft type vehicle, *FUZZ IEEE 2000. The Ninth IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Vol. 2, pp. 804–809.
- Taniguchi, T., K., Ohatake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **9**(4): 525–537.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5): 613–623.
- Wang, L.-X. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.
- Yan, S. and Sun, Z. (2010). Study on separation principles for T-S fuzzy system with switching controller and switching observer, *Neurocomputing* **73**(13-15): 2431–2438.
- Yang, G.-H. and Dong, J. (2010). Switching fuzzy dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control for nonlinear systems, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **40**(2): 505–516.