

# CONTROLE $H_\infty$ APLICADO A UM ROBÔ OMNIDIRECIONAL

LORENZO L. AUGELLO, HUMBERTO X. ARAÚJO, ANDRÉ G. S. CONCEIÇÃO

Laboratório de Robótica-LaR, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE, Universidade Federal da Bahia

Rua Aristides Novis, nº 2, Federação. CEP 40210-630 – Salvador-BA - Brasil

E-mails: llaugello@gmail.com, humberto.araujo@ufba.br, andre.gustavo@ufba.br

**Abstract**— In this paper a state feedback  $H_\infty$  Controller based on LMI is designed and applied to the velocity control problem on an Omni-Directional Mobile Robot. The robot model is based on its phenomenology including a frictional static model. Experimental results are obtained with  $H_\infty$  Controller. A classic PI controller is used to analyze the results.

**Keywords**—  $H_\infty$  Controller, Linear Matrix Inequality, Omni-Directional Robot, Tracking Control, Pole Placement.

**Resumo**— Neste artigo, um controlador  $H_\infty$  com abordagem via Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs, por realimentação de estados, é projetado e aplicado no controle de velocidade de um Robô Móvel Omnidirecional. A modelagem do robô é baseada em sua fenomenologia, e nesta o efeito do atrito estático é levado em consideração. Resultados experimentais são obtidos com o controlador  $H_\infty$ . Um controlador clássico PI também é utilizado para análise dos resultados.

**Palavras-chave**— Controlador  $H_\infty$ , LMI, Robô Omnidirecional, Controle de Trajetória, Alocação de Pólos.

## 1 Introdução

O controle de robôs móveis abrange um importante campo de estudo, pois além do seu amplo espectro de aplicação, apresentam desafios específicos envolvendo limitações físicas dos atuadores, incertezas, dinâmicas não modeladas não-linearidades, (Barreto *et al.*, 2013). Outros aspectos que influenciam os sistemas robóticos são a presença de ruído, irregularidades do terreno e deslizamento.

Robôs Omnidirecionais têm um grande destaque dentre os robôs móveis pela sua capacidade de se movimentar em translação e rotação, simultaneamente e independentemente. A modelagem de um robô omnidirecional de quatro rodas proposta em (Conceição *et al.*, 2009) utiliza-se de métodos de estimação incluindo compensação de atrito, e foi validada experimentalmente. Uma interpretação deste modelo em espaço de estados será utilizada neste trabalho (Correia *et al.* 2011). Em (Araújo *et al.*, 2011), aplicou-se um Controlador Preditivo Baseado em Modelo a um robô omnidirecional de três rodas desconsiderando as não-lineares, contornadas pela característica robusta do controlador. Verificou-se que o efeito do atrito associado à velocidade do robô possui forte característica não-linear, capaz de interferir no comportamento do robô.

As desigualdades matriciais lineares (LMIs) (Boyd *et al.*, 1994) têm ganhado destaque na área de Controle, nas últimas décadas. Diversos controladores vêm sendo projetados utilizando essa abordagem, como o Controlador Misto  $H_2/H_\infty$  (Zhou *et al.*, 1996), com resultados bastante relevantes (Jiang, 2008). A abordagem via LMIs possibilita a determinação da solução ótima global, com técnicas de otimização bastante eficientes. Em (Song *et al.*, 2009),

consideram-se terreno irregular, perturbações das cargas e incertezas dinâmicas do robô como causas da perda de exatidão do movimento dos robôs, na execução de uma tarefa específica. Em (Mary, 2011), um Controlador Robusto  $H_\infty$ , com abordagem LMI, é aplicado a um robô móvel considerando-se a presença de distúrbios diretamente na saída do sistema.

Neste artigo, um controlador de velocidade  $H_\infty$  é aplicado a um robô omnidirecional de três rodas, ao qual se verifica a presença de perturbações no sistema. Os resultados experimentais demonstram boa rejeição a perturbações, além de seguir satisfatoriamente as referências de velocidades. Os resultados desse controlador são comparados aos do PI.

A estrutura deste artigo é a seguinte: na Seção 2, o robô omnidirecional utilizado é apresentado, bem como sua modelagem; na Seção 3, é formulado o controlador  $H_\infty$  utilizando-se as LMIs; são apresentados, na Seção 4, os resultados experimentais, além da comparação de resultados com o Controlador Clássico PI; as conclusões são discutidas na Seção 5.

## 2 O Robô Omnidirecional

O robô omnidirecional utilizado, apresentado na Figura 1, possui três rodas suacas, igualmente espaçadas, formando um ângulo de  $120^\circ$  entre cada uma, montadas sobre uma base móvel ao qual é acomodado o *hardware* do sistema. *Encoders* em cada roda são responsáveis pelas medições de velocidade. Cada um dos três motores está interligado a um *driver* de potência com limitação na corrente elétrica de armadura, uma salvaguarda para o sistema de baterias. Aos motores são acopladas caixas redutoras de velocidade. A redução oferece um torque maior no eixo da roda se comparado ao eixo do motor. A posição do robô é estimada pelo seu sistema odométrico.

O modelo do robô é obtido por estimação paramétrica, baseada no método dos mínimos quadrados, para obtenção dos coeficientes de atrito viscoso, de atrito de Coulomb e momento de inércia. Este modelo (Correia *et al.*, 2011) determinado observando-se os aspectos dinâmicos e cinemáticos do robô, possui características não-lineares. Os motores CC em cada roda do robô impõem restrições de dinâmica, que devem ser levadas em conta no controle do sistema, como a saturação em corrente e tensão. As forças de atrito que aparecem com o movimento do robô também são responsáveis pela presença de não-linearidades no sistema.

### 2.1 Cinemática do Robô

Pela Figura 2, a postura do robô pode ser descrita pelo vetor  $\xi = [x_r \ y_r \ \theta]^T$ , sendo  $x_r$  e  $y_r$  a localização de seu centro de gravidade, o ponto P, no sistema de coordenadas da terra, e  $\theta$  a diferença angular entre os sistemas de coordenadas da terra e do robô.

O vetor de velocidades no sistema de coordenadas do robô  $\dot{\xi}_r = [v \ v_n \ \omega]^T$  descreve a velocidade linear do sistema, representado pelas componentes ortogonais  $v$  e  $v_n$ , e angular  $\omega$  do corpo do robô.

Definindo-se  $R(\theta)$  a matriz de mapeamento entre os sistemas de coordenadas, a equação cinemática do robô é dada por:

$$\dot{\xi} = R^T(\theta) \cdot \dot{\xi}_r, \quad (1)$$

e a matriz ortogonal de rotação  $R(\theta)$  é descrita por:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

### 2.2 Dinâmica do Robô

Pela Segunda Lei de Newton e pela Figura 2 as equações de translação e rotação do robô são dadas por:

$$F_v(t) - B_v \cdot v(t) - C_v \cdot \text{sgn}(v(t)) = M \cdot \frac{dv(t)}{dt}, \quad (3)$$

$$F_{v_n}(t) - B_{v_n} \cdot v_n(t) - C_{v_n} \cdot \text{sgn}(v_n(t)) = M \cdot \frac{dv_n(t)}{dt}, \quad (4)$$

$$\Gamma(t) - B_\omega \cdot \omega(t) - C_\omega \cdot \text{sgn}(\omega(t)) = I_n \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (5)$$

$$\text{com } \text{sgn}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -1, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (6)$$

e  $F_v$  e  $F_{v_n}$  são as forças de tração e  $\Gamma$  o torque no sistema de coordenadas do robô,  $M$  é a massa e  $I_n$  o momento de inércia do robô em relação a P. Os coeficientes de atrito viscoso são representados por  $B_v$ ,  $B_{v_n}$  e  $B_\omega$ , e os de Coulomb são  $C_v$ ,  $C_{v_n}$  e  $C_\omega$ .

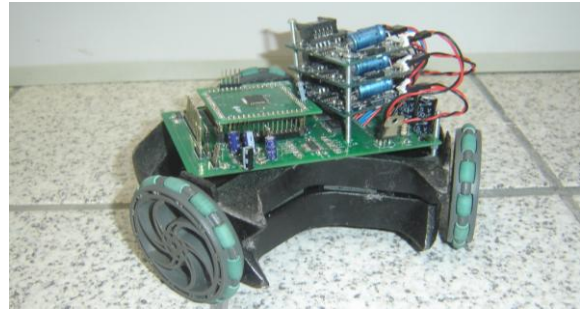


Figura 1. Robô Móvel Omnidirecional Axebot.

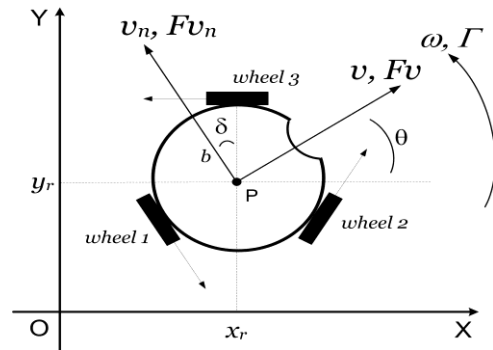


Figura 2. Sistemas de coordenadas e parâmetros geométricos. As relações entre as forças de tração  $F_v$  e  $F_{v_n}$  e o

torque  $\Gamma$  do robô e as forças de tração nas rodas são dadas por:

$$F_v(t) = \cos(\delta) \cdot (f_2(t) - f_3(t)), \quad (7)$$

$$F_{v_n}(t) = -f_1(t) + \sin(\delta) \cdot (f_2(t) + f_3(t)), \quad (8)$$

$$\Gamma(t) = (f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)) \cdot b, \quad (9)$$

sendo  $b$  a distância entre o centro de massa e as rodas,  $\delta=30^\circ$  e  $f_1, f_2, f_3$  as forças de tração em cada roda. As forças  $f_i, i=1,2,3$ , são obtidas por:

$$f_i(t) = \frac{T_i(t)}{r_i}, \quad (10)$$

com  $T_i$  o torque de rotação e  $r_i$  o raio de cada roda.

O comportamento dinâmico de cada motor CC ( $i=1,2,3$ ) pode ser descrito pelas equações:

$$u_i(t) = L_{a_i} \cdot \frac{di_{a_i}(t)}{dt} + R_{a_i} \cdot i_{a_i}(t) + K_{v_i} \cdot \omega_{m_i}, \quad (11)$$

$$T_i(t) = l_i \cdot K_{t_i} i_{a_i}(t), \quad 0 \leq i_{a_i}(t) \leq i_{MAX}, \quad (12)$$

sendo  $L_{a_i}$  as indutâncias da armadura,  $R_{a_i}$  as resistências,  $l_i$  as reduções de velocidade em cada motor,  $\omega_{m_i}$  as velocidades angulares dos rotores,  $i_{a_i}$  as correntes de armadura,  $K_{t_i}$  a constante de torque e  $K_{v_i}$  a constante emf.  $u_i$  são as tensões de armadura com restrições de amplitude dadas por  $|u_i(t)| \leq 6V$ .

### 2.3 Modelo no Espaço de Estados

Escrevendo-se as equações do modelo no espaço de estados, têm-se:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c \cdot x(t) + B_c \cdot u(t) + K_c \cdot \text{sgn}(x(t)), \\ y(t) = C_c \cdot x(t) \end{cases} \quad (13)$$

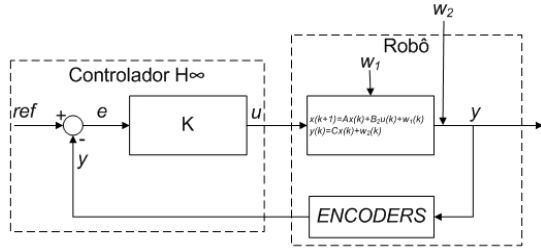


Figura 3. Diagrama de Blocos.

sendo  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t)]^T$  o vetor de controle,  $x(t) = [\nu(t) \ \nu_n(t) \ \omega(t)]^T$  o vetor de variáveis de estados e  $y(t)$  o vetor de saídas do sistema. Considerando-se  $l = l_i$ ,  $r = r_i$ ,  $R_d = R_{d_i}$  e  $K_r = K_{r_i}$ , devido à simetria, as matrizes do modelo são:

$$A_c = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot l^2 \cdot K_r^2}{2 \cdot M \cdot R_d \cdot r^2} - \frac{B_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot l^2 \cdot K_r^2}{2 \cdot M \cdot R_d \cdot r^2} - \frac{B_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3 \cdot b^2 \cdot l^2 \cdot K_r^2}{I_n \cdot R_d \cdot r^2} - \frac{B_\omega}{I_n} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \frac{l \cdot K_r}{R_d \cdot r} \begin{bmatrix} 0 & \cos(\delta) & -\cos(\delta) \\ -1 & \frac{M}{\sin(\delta)} & \frac{M}{\sin(\delta)} \\ \frac{M}{b} & \frac{M}{b} & \frac{M}{b} \\ I_n & I_n & I_n \end{bmatrix}, \quad K_c = \begin{bmatrix} -\frac{C_v}{M} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{v_n}}{M} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_\omega}{I_n} \end{bmatrix},$$

$$C_c = I.$$

A discretização das equações (13), com período de amostragem de 50ms, fornece o seguinte modelo:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d \cdot x(k) + B_{d_2} \cdot u(k) + K_d \cdot \text{sgn}(x(k)), \\ y(k) = C_d \cdot x(k). \end{cases} \quad (14)$$

Analisando-se as equações (13), pode-se observar que as não-linearidades consideradas residem no termo  $K_d \cdot \text{sgn}(x(k))$ . Desta forma, para efeito de Controle, esse termo será considerado, na modelagem do robô, como uma perturbação aleatória, representada por  $w$ .

Desta maneira, tem-se a seguinte descrição para o sistema a ser controlado:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d \cdot x(k) + B_{d_2} \cdot u(k) + w(k), \\ y(k) = C_d \cdot x(k) \end{cases} \quad (15)$$

Os métodos de estimação de parâmetros utilizados para obter os coeficientes de atrito e o momento de inércia são descritos em (Conceição *et al.*, 2009).

### 3 Controlador $H_\infty$

Deseja-se projetar um controlador  $H_\infty$ , por realimentação de estados  $u(k) = Kx(k)$ , com alocação de pólos em um disco, para o robô omnidirecional, conforme esquema Figura 3.

O uso do controlador  $H_\infty$  justifica-se pelo fato de o sistema robótico apresentar distúrbios com grandes amplitudes em um largo espectro de frequência. Neste trabalho, a minimização da norma  $H_\infty$  é

feita considerando-se a função de transferência entre o distúrbio e a saída controlada e o sinal de controle.

#### 3.1 Inclusão de Ação Integral

Para que uma ação integral seja incorporada ao controlador  $H_\infty$ , o modelo do robô no espaço de estados pode ser reescrito em função do erro, como segue.

Considera-se o erro  $e(k)$  definido por:

$$e(k) = y(k) - r, \quad (16)$$

e  $r$  é o vetor de referências constantes. Das equações (15) e (16), tem-se que:

$$e(k+1) = C_d \cdot A_d \cdot x(k) + C_d \cdot B_{d_2} \cdot u(k) - r + C_d \cdot w_1(k), \quad (17)$$

Uma ação integral é adicionada à malha de controle por meio do estado  $\xi$  (Krikelis e Barkas, 1984), definido por:

$$\xi(k+1) = e(k) + \xi(k). \quad (18)$$

Alterando-se o sistema de coordenadas para as coordenadas do erro, o novo vetor de variáveis de estado aumentado  $\zeta$  torna-se:

$$\zeta(k+1) = \begin{bmatrix} e(k+1) \\ \xi(k+1) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Desta maneira, com a inclusão da ação integral proposta, o modelo (15) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A \cdot \zeta(k) + B_1 \cdot w(k) + B_2 \cdot u(k) + B_r \cdot r, \\ y(k) = C_2 \cdot \zeta(k) + r \end{cases} \quad (20)$$

sendo as matrizes  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$ ,  $D_{21}$  e  $D_{22}$  dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ I & I \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{d_2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_r = [A_d - I \ 0]^T.$$

#### 3.2 Síntese do Controlador $H_\infty$ - Abordagem LMI

Considerando-se a saída controlada do sistema como  $z(k) = [y(k) \ u(k)]^T$ , o modelo do robô pode ser escrito por:

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A \cdot \zeta(k) + B_1 \cdot w(k) + B_2 \cdot u(k) + B_r \cdot r \\ z(k) = C_1 \cdot \zeta(k) + D_{11} \cdot w(k) + D_{12} \cdot u(k) + D_r \cdot r, \\ y(k) = C_2 \cdot \zeta(k) + r \end{cases} \quad (21)$$

sendo  $D_{12} = [0 \ I]^T$ ,  $D_r = [I \ 0]^T$ ,

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.6979 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6972 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8220 \end{bmatrix}, \quad B_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0454 & -0.0454 \\ -0.0524 & 0.0262 & 0.0262 \\ 0.1701 & 0.1701 & 0.1701 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D_{11} = [0].$$

Deseja-se então projetar o ganho  $K$  do controlador por realimentação de estados que minimize a norma  $H_\infty$  da função de transferência em malha fechada entre a perturbação  $w$  e a saída controlada  $z$ ,  $H_{wz}(z)$ .

Com relação ao sistema (21), as seguintes afirmações são equivalentes (Mackenroth, 2004):

1. Existe um controlador por realimentação de estados  $u = K \cdot \zeta$  que estabiliza o sistema (21) e garante  $\|H_{wz}(z)\|_\infty < \gamma$ ;
2. Existem matrizes  $P = P^T \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$  e  $L \in \mathfrak{R}^{3 \times 6}$ , que satisfazem as LMIs em  $P$  e  $\gamma$ :

$$\begin{bmatrix} P & P^T \cdot A^T + L^T \cdot B_2^T & 0 & P^T \cdot C_1^T + L^T \cdot D_{12}^T \\ A \cdot P + B_2 \cdot L & P & B_1 & 0 \\ 0 & B_1^T & \gamma^2 \cdot I & D_{11}^T \\ C_1 \cdot P + D_{12} \cdot L & 0 & D_{11} & I \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

com  $K = L \cdot P^{-1}$ .

O controlador  $H_\infty$ , que satisfaz  $\|H_{wz}(z)\|_\infty < \gamma$ , pode ser obtido resolvendo-se o problema convexo:

$$\min_K \|H_{wz}(z)\|_\infty = \min_{P, L, \gamma} \gamma, \quad (23)$$

sujeito ao conjunto de restrições em (22). O controlador  $H_\infty$  é dado por  $K = L \cdot P^{-1}$ .

### 3.2 Síntese do Controlador $H_\infty$ com Alocação de Pólos

Com o objetivo de melhorar as características de resposta transitória, uma restrição para a alocação de pólos foi adicionada ao problema. Para as mesmas matrizes  $L$  e  $P$  definidas anteriormente, com  $u = K \cdot \zeta$ , a LMI que realiza a alocação de pólos em malha fechada dentro de um círculo é dada por (Chilali *et al.*, 1999):

$$\begin{bmatrix} -\bar{r} \cdot P & -\bar{c} \cdot P + A \cdot P + B_2 \cdot L \\ -\bar{c} \cdot P + P^T \cdot A^T + L^T \cdot B_2^T & -\bar{r} \cdot P \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

com  $\bar{c}$  e  $\bar{r}$ , respectivamente, a coordenada do centro sobre o eixo real e o raio do círculo. Neste projeto, após alguns testes práticos, os valores adotados para  $\bar{c}$  e  $\bar{r}$  que propiciaram um bom desempenho em termos de tempo de resposta, associado a um adequado esforço de controle, são  $\bar{c} = 0,5$  e  $\bar{r} = 0,25$ . Resolvendo-se o problema (23) sujeito às restrições (22) e (24), com o auxílio do pacote LMITool do MATLAB, o ganho do controlador  $H_\infty$  obtido,  $K = L \cdot P^{-1}$ , é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 4.2169 & -1.1726 & 0 & 1.2686 & -0.2887 \\ -3.6530 & -2.1084 & -1.1726 & -1.0965 & -0.6343 & -0.2887 \\ 3.6530 & -2.1084 & -1.1726 & 1.0965 & -0.6343 & -0.2887 \end{bmatrix}$$

## 4 Resultados Experimentais

Os experimentos apresentados a seguir foram estruturados da seguinte maneira: a Subseção 4.1 apresenta o desempenho do robô com o controlador  $H_\infty$  proposto executando uma trajetória em “8”, a Subseção 4.2 compara os resultados deste com o de um controlador PI embarcado (período de amostragem de 10ms), conforme sintonia desenvolvida em (Ribeiro *et al.*, 2011) para seguimento de referências constantes, e a Subseção 4.3 analisa ambos os controladores em mudanças bruscas de movimento.

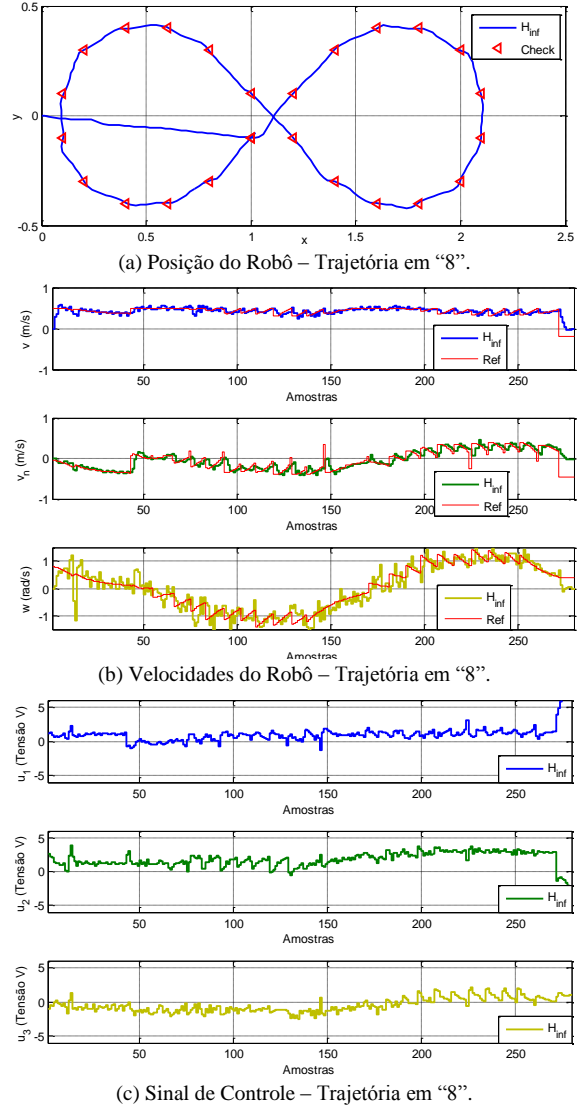


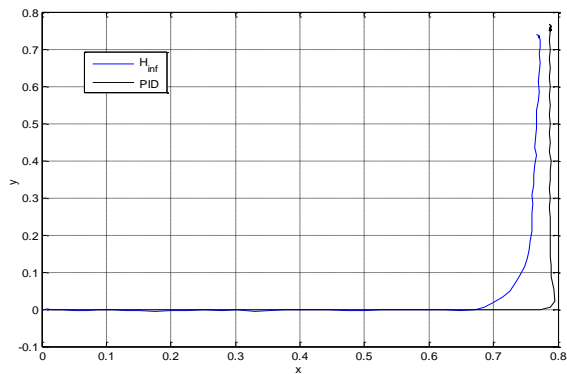
Figura 4. Resultados de experimentais com o controlador  $H_\infty$  – Trajetória em “8”.

### 4.1 Trajetória em “8” – Desempenho $H_\infty$

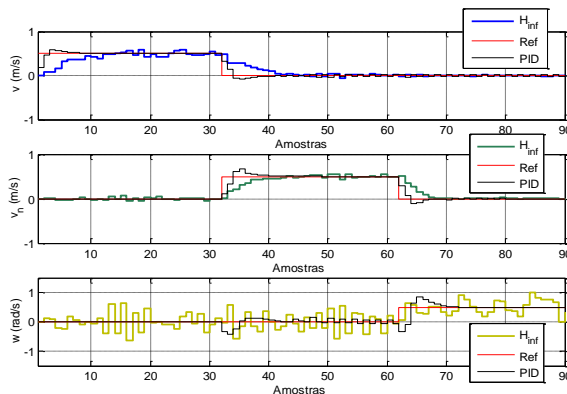
A Figura 4 apresenta os resultados experimentais obtidos com o controlador  $H_\infty$  na realização da trajetória em “8” (Figura 4.a). A Figura 4.b apresenta os sinais de referência e os de velocidade  $v$ ,  $v_n$  e  $\omega$ .

A partir de um conjunto de pontos no sistema de coordenadas  $(x, y, \theta)$  que descrevem a trajetória desejada, utilizou-se uma malha externa para gerar as velocidades de referência baseando-se na posição atual do robô e a na posição desejada. Verifica-se na Figura 4.a, onde as marcações em vermelho indicam os *checkpoints*, que a trajetória desejada trata-se de um “8 discretizado”. A cada instante, de acordo com as velocidades empregadas pelo robô, a posição atual é atualizada.

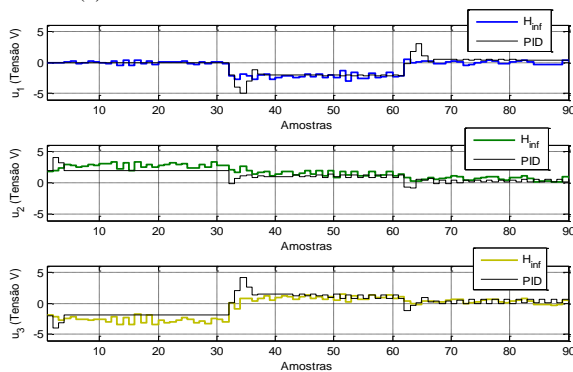
A Figura 4.c apresenta os sinais de controle nos três motores do robô. Nota-se que não foram violadas as restrições de limites das tensões nos motores do robô, o que é importante para manter o bom desempenho do controlador.



(a) Posição do Robô – Referência Constante.



(b) Velocidades do Robô – Referência Constante.



(c) Sinais de Controle – Referência Constante.

Figura 5. Resultados  $H_\infty$  versus PI – Referência Constante.

#### 4.2 Referência Constante: $H_\infty$ versus PI

A Figura 5 apresenta os resultados experimentais obtidos com o robô para os controladores  $H_\infty$  e PI, com valores de referência constantes, conforme curvas da Figura 5.b. Neste experimento, foram fornecidos diretamente os valores de referência aos controladores, aplicando-se pulsos de largura de 30 amostras e magnitude 0,5 em momentos distintos, em cada estados  $v$ ,  $v_n$  e  $\omega$ , de modo a realizar o trajeto da Figura 5.a, sendo representados os trajetos para controladores  $H_\infty$  e PI. Nota-se, pelos gráficos da Figura 5, um desempenho muito semelhante dos controladores, tanto no rastreamento das referências e rejeição das perturbações quanto na magnitude das tensões dos motores. O PI tem tempo de resposta de 6 instantes de amostragem, enquanto o  $H_\infty$  apresenta 10 instantes.

#### 4.3 Mudança de Direção: $H_\infty$ versus PI

A Figura 6 compara os resultados do robô para os controladores  $H_\infty$  e PI com referências de velocidade que provocam inversão brusca no sentido do movimento do robô. Aplicou-se ao robô uma referência de velocidade na direção  $v$  de +0,5 m/s e depois de aproximadamente 100 amostras, aplicou-se a mesma velocidade com sentido contrário.

A Figura 6.d apresenta as curvas de variação de tensão nos motores, em valor absoluto, ao longo do experimento. Pelos gráficos da Figura 6.d, nota-se uma grande variação no esforço de controle no momento de inversão de sentido do movimento, que se manteve por alguns instantes. A partir deste instante o controlador  $H_\infty$  ainda consegue realizar o rastreamento das referências, cuja variação de tensão atinge 3,7V num único instante de tempo, conforme Figura 6.b e 6.d, mas o mesmo não pode ser dito para o controlador PI, constatado nas Figura 6.a e 6.c. O controlador PI não possui nenhum tipo de restrição na variação da tensão, atingindo uma variação de tensão de até 3,2V durante alguns instantes, de modo que a atuação do microprocessador foi interrompida pelo alto pico de corrente requisitado pelos motores, levando algum tempo para voltar a funcionar.

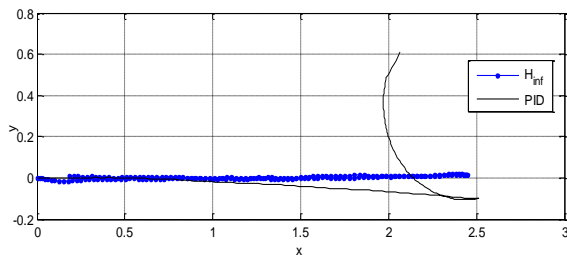
## 5 Conclusão

O artigo apresentou a síntese de um controlador  $H_\infty$  com uma abordagem via LMI, considerando-se as não-linearidades do sistema como distúrbios, buscando minimizar seu efeito na saída e no sinal de controle. Incluiu-se uma ação integral ao sistema discreto para obtenção de erro em regime permanente nulo.

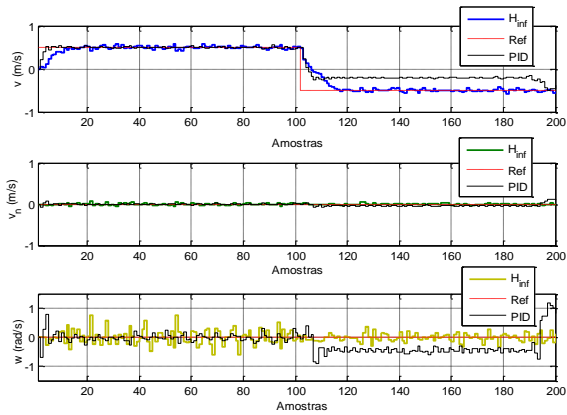
Na Subseção 4.1, o controlador  $H_\infty$  realizou com boa precisão o rastreamento das referências e executou a trajetória satisfatoriamente. Nota-se que a componente angular  $\omega$  apresenta um elevado ruído de medição.

O controlador  $H_\infty$  foi comparado com o controlador clássico PI na Subseção 4.2. Para as comparações com o controlador PI, foi dado um foco maior na análise dos sinais de controle. Ambos os controladores tiveram bom desempenho em seus objetivos, tendo o controlador PI um resultado melhor em relação ao tempo de resposta do robô. Vale ressaltar que o PI embarcado no microprocessador atua a cada 10ms, mas com referências atualizadas a cada 50ms, enquanto o controlador  $H_\infty$ , não embarcado no microcontrolador, atua somente a cada 50ms.

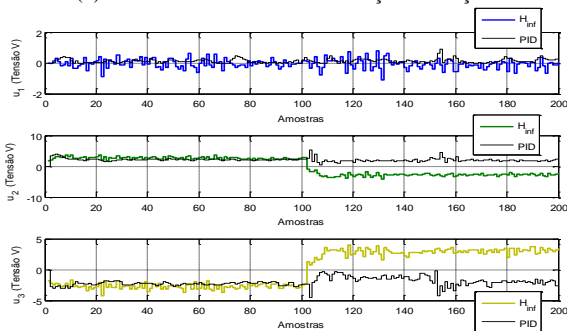
Por fim, na Subseção 4.3, o robô com o controlador PI mostrou que pode não operar corretamente quando submetido a mudanças bruscas de sentido de movimento, onde há forte presença de não-linearidades. No momento da inversão, com a súbita elevação da corrente nos motores, o microprocessador do sistema desligou e levou um tempo para retornar à operação normal. O mesmo não ocorreu com o controlador  $H_\infty$ , que possui atuação mais suave.



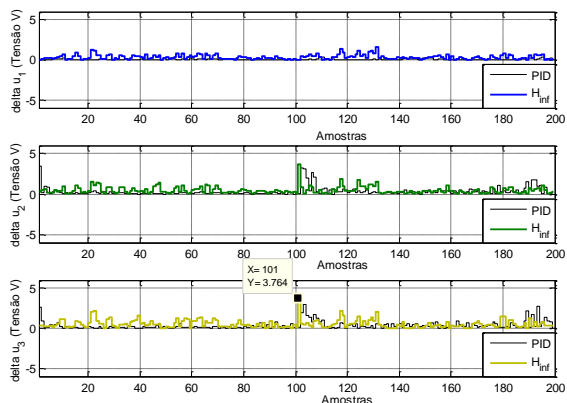
(a) Posição do Robô – Mudança de Direção.



(b) Velocidades do Robô – Mudança de Direção.



(c) Sinais de Controle – Mudança de Direção.



(d) Variação dos Esforços de Controle – Mudança de Direção.

Figura 6. Resultados do  $H_\infty$  versus PI – Mudança de Direção.

Nos experimentos realizados com o robô omnidirecional, o controlador  $H_\infty$  teve um bom desempenho no rastreamento das referências e na rejeição das perturbações. Para o controlador  $H_\infty$  manter seu desempenho não se deve ter os motores operando nas proximidades da saturação, onde há perda de desempenho. Isto foi evitado com a alocação de pólos de malha fechada. O controlador ainda apresentou uma melhor execução dos trajetos propostos quando comparado ao PI, com exatidão semelhante, entretanto

com melhor precisão, apesar de requisitar mais tempo para atingir o regime permanente.

## Referências Bibliográficas

- Araújo, H. X.; Conceição, A. S.; Oliveira, G. H. C. e Pitanga, J. (2011). Model Predictive Control based on LMIs Applied to an Omni-Directional Mobile Robot. *IFAC*.
- Barreto Sb.; J. C. L.; Dórea, C. E. T.; Martinez, L.; Pieri, E. R. e Conceição, A. G. S. (2013). Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot. *Transactions on Mechatronics, IEEE/ASME*, p. 1-10.
- Boyd, S.; Ghaoui, L. El; Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Vol. 15.
- Chilali, M.; Gahinet, P. e Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions. *Transactions on Automatic Control, IEEE*. Vol. 44, pp. 2257-2270.
- Conceição, A. S.; Moreira, A. P. e Costa, P. J. (2009). Practical Approach of Modeling and Parameters Estimation for Omnidirectional Mobile Robots. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 14(3):377-381.
- Correia, M. D., Conceição, A. G. S. (2012). Modeling of a Three Wheeled Omnidirectional Robot Including Friction Models. *10th International IFAC Symposium on Robot Control - SYROCO 2012*. Dubrovnik, 2012. p.7 - 12
- Jiang, W. (2008). Robust  $H_\infty$  Controller Design for Wheeled Mobile Robot with Time-delay. *International Conference on Intelligent Technology and Automation*, IEEE.
- Zhou, K.; Doyle, J. C. E Glover, K. (1996). Robust and Optimal Control. Prentice-Hall, New Jersey.
- Krikelis, N. J. e Barkas, S. K. (1984). Design of Tracking Systems Subject to Actuator Saturation and Integrator Wind-Up. *International Journal of Control*, 30(12): 1869-1883.
- Mackenroth, U. (2004). Robust Control Systems: Theory and Case Studies. *Springer-Verlag*.
- Mary, A. D (2011). Robust LMI Based Control of Wheeled Mobile Robots. *International Conference on Computer Science & Education*, IEEE.
- Ribeiro, T. T.; Santos, J. T.; Santos, J.; Conceição, A. G. S. e da Costa, A. L. (2011). Real-time Microprocessed System Applied to Mobile Robot Control. *Robotics Symposium*. IEEE.
- Song, Y.; Tan, D. e Miao, M. (2009). Disturbance Analysis and Control for an Omnidirectional Wheeled Mobile Robot. *International Conference on Mechatronics and Automation*, IEEE.