

# ESTRATÉGIAS DE CONTROLE BASEADO EM PASSIVIDADE PARA SISTEMAS MECÂNICOS SUBATUADOS - UMA APLICAÇÃO AO HELICÓPTERO QUADRIRROTOR

C. SOUZA\*, G. V. RAFFO†, E. B. CASTELAN\*

\**Departamento de Automação e Sistemas  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Florianópolis, SC, Brasil*

†*Departamento de Engenharia Eletrônica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, MG, Brasil*

Emails: cristian@das.ufsc.br, raffo@ufmg.br, eugenio@das.ufsc.br

**Abstract**— This work presents an underactuated IDA-PBC methodology to design controllers for a quadrotor helicopter. Two controllers are formulated and simulation results are used to illustrate their performance. The first one regulates the coordinate  $z$  satisfying the constraint equations for the stabilization of underactuated systems assuming the orientation of the system linearized at the origin. The second controller uses a formulation for path tracking problem of underactuated systems.

**Keywords**— Passivity based control, underactuated mechanical systems, constraint equations, PCH

**Resumo**— Este trabalho apresenta uma metodologia de controle IDA-PBC para sistemas sub-atuados para geração de controladores de um helicóptero quadrirrotor. Dois controladores são formulados e resultados de simulação são usados para ilustrar o desempenho obtido. O primeiro controlador regula a coordenada  $z$  satisfazendo as equações de restrição para estabilização de sistemas sub-atuados assumindo a orientação do sistema linearizada na origem zero. O segundo controlador utiliza uma formulação para o problema de seguimento de trajetória para sistemas sub-atuados.

**Palavras-chave**— Controle baseado em passividade, sistemas mecânicos subatuados, equações de restrição, HPC

## 1 Introdução

Veículos aéreos não tripulados (VANTs) na configuração quadrirrotor são sistemas VTOL (Vertical Take-off and Landing) que fazem uso de quatro rotores acoplados a hélices fixas (ausência dos comandos de cíclico e coletivo) para gerar seus movimentos. Decolam e pousam em área limitada, voam em baixas velocidades, realizam voo pairado e possuem grande manobrabilidade.

A disposição dos rotores é dada aos pares e os movimentos são dados acelerando e desacelerando-os. Este tipo de helicóptero tenta alcançar a estabilidade de voo utilizando as forças de equilíbrio produzidas por seus quatro rotores (Raffo et al., 2010). Cada rotor exerce uma força vertical que depende da sua velocidade e a soma de suas forças resulta no empuxo total da aeronave. O par de rotores  $(f_1, f_3)$  gira no sentido contrário ao par  $(f_2, f_4)$ , desta forma o efeito giroscópico é minimizado e por conveniência este efeito pode ser desconsiderado na modelagem do sistema e tratado como uma perturbação no sistema de controle.

O projeto de sistemas de controle para aeronaves do tipo quadrirrotor não é uma tarefa trivial, já que estes sistemas são subatuados (i.e., possuem mais graus de liberdade que entradas de controle), apresentam comportamento altamente não linear, são constantemente afetados por distúrbios exógenos e são alvos de incertezas paramétricas. Como são sistemas instáveis, uma lei de controle deve ser projetada e deve ser robusta o suficiente para lidar com perturbações externas (rajadas de vento), com variações e incertezas paramétricas, possibilitando à aeronave voar de forma semi ou

completamente autônoma.

*Interconnection and Damping Assignment (IDA)* é uma metodologia de controle PBC (*Passivity Based Control*) apresentada em (Ortega, van der Schaft, Maschke and Escobar, 2002) que se aplica a sistemas descritos pelo modelo HPC (Hamiltoniano de Porta Controlada). Esta metodologia consiste em atribuir um novo modelo HPC em malha fechada através da atribuição de amortecimento e interconexão.

O objetivo deste trabalho é a aplicação da metodologia IDA-PBC, formulado para sistemas subatuados, para controlar uma aeronave quadrirrotor. Primeiramente, as equações de restrição, apresentadas em (Ortega, Spong, Gomez-Estern and Blankenshtein, 2002), são resolvidas para o problema de regulação do quadrirrotor a uma determinada altitude mantendo seus ângulos de orientação nulos. Posteriormente, essa metodologia é levada ao problema de seguimento de trajetória, onde as equações de restrição obtidas para o problema de regulação não são mais válidas, como mostrado em (Wang and Goldsmith, 2008) através da definição de um novo conjunto de equações de restrição. Essa última abordagem oferece um grande desafio devido a solução nada trivial das restrições que vêm em forma de EDPs.

A organização deste artigo é dada da seguinte forma: na seção 2 o modelo utilizado no projeto do controle é desenvolvido, na seção 3 e 4 os controladores para regulação e seguimento de trajetória, respectivamente, são obtidos e simulados. Por fim, as conclusões são apresentadas na seção 5.

## 2 Modelagem do VANT Quadrirotor

As equações do movimento que descrevem a dinâmica de uma aeronave podem ser facilmente obtidas através da formulação de Euler-Lagrange e expressadas de forma compacta como segue:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\Gamma + \Gamma_d \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  a matriz de inércia,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  o chamado vetor de forças centrífugas e de Coriolis,  $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  representa o vetor de força gravitacional,  $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{b}_m(\mathbf{q})] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de forças externas,  $\Gamma \in U$  é o vetor de ação de controle, sendo  $U$  o espaço de atuação  $m$ -dimensional, e  $\Gamma_d$  representa os efeitos totais provenientes de erros de modelagem e perturbações externas. O vetor de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{q}$ , é definido como:

$$\mathbf{q} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]' \quad (2)$$

que expressa a posição e orientação do quadrirotor no espaço Euclidiano.

O modelo utilizado no projeto do controlador é um modelo simplificado, onde assume-se o centro de rotação e o centro de massa congruentes e uma estrutura simétrica com relação ao sistema de coordenadas do corpo, acarretando em uma matriz de tensor de inércia apenas com elementos na diagonal principal. Além disso, uma inclinação nos rotores em direção ao centro do quadrirotor, inicialmente proposta em Raffa et al. (2011), é adotada com o propósito de aumentar a controlabilidade do modelo utilizado na fase de projeto da lei de controle, criando acoplamento entre os movimentos longitudinais e laterais com os movimentos de rolagem ( $\theta$ ) e arfagem ( $\phi$ ). Essa mudança estrutural, só considerada para fins de projeto do controlador, evita a necessidade de se utilizar um espaço de estados aumentado e estratégias de controle em cascata.

Os movimentos realizados pelo quadrirotor dependem da força que cada rotor aplica perpendicularmente ao plano das hélices. Esta força depende diretamente da velocidade de rotação da hélice que pode ser aproximada de acordo com a seguinte função,  $f_i = b\Omega_i^2$  onde  $b$  é o coeficiente de empuxo de cada motor. A força vertical total aplicada ao quadrirotor chamada empuxo,  $T$ , é obtida através do somatório das componentes das forças produzida pelos rotores,  $f_{i_zB}$ , com relação ao sistema de coordenadas do corpo,  $\mathcal{B}$  (ver Figura 1). Assim as forças projetadas em cada eixo do quadrirotor são dadas por:

$$f_a = \begin{bmatrix} f_{x_a} \\ f_{y_a} \\ f_{z_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha)(f_3 - f_1) \\ \sin(\alpha)(f_4 - f_2) \\ \sum_{i=1}^4 \cos(\alpha)f_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo  $\alpha$  o ângulo de inclinação dos rotores.

Os torques aplicados ao helicóptero com relação aos eixos do sistema de coordenada do corpo são ob-

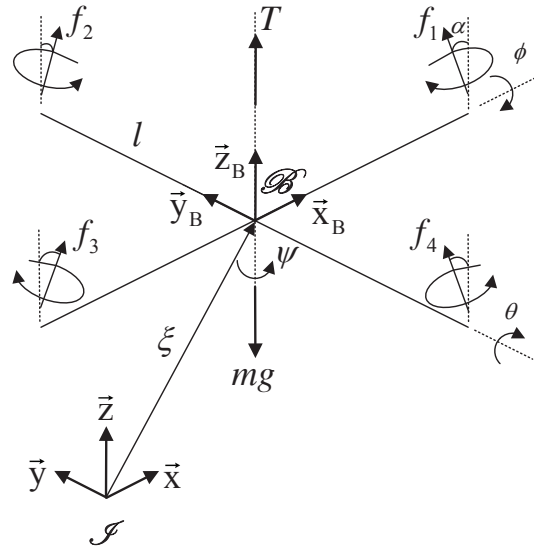


Figura 1: Esquema do helicóptero quadrirotor.

tidos como segue:

$$\tau_a = \begin{bmatrix} \tau_{xa} \\ \tau_{ya} \\ \tau_{za} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)(f_2 - f_4)l \\ \cos(\alpha)(f_3 - f_1)l \\ \sum_{i=1}^4 \cos(\alpha)\tau_{Mi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde  $l$  é a distância entre o centro dos rotores e o centro de rotação do quadrirotor e  $\tau_{Mi}$  é o esforço de torção gerado por cada rotor, que pode ser aproximado em regime permanente pela expressão,  $\tau_{Mi} = k_\tau \Omega_i^2$  com  $k_\tau > 0$  a constante de arrasto do rotor.

A matriz de forças externas é reescrita em função da velocidade ao quadrado dos rotores:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q})\Gamma &= \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{B}_M \mathbf{u}_M = \mathbf{B}_S(\mathbf{q})\mathbf{u}_M = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -bS(\alpha) & 0 & bS(\alpha) & 0 \\ 0 & -bS(\alpha) & 0 & bS(\alpha) \\ bC(\alpha) & bC(\alpha) & bC(\alpha) & bC(\alpha) \\ 0 & lbC(\alpha) & 0 & -lbC(\alpha) \\ -lbC(\alpha) & 0 & lbC(\alpha) & 0 \\ k\tau C(\alpha) & -k\tau C(\alpha) & k\tau C(\alpha) & -k\tau C(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com  $\mathbf{W}_\eta$  sendo a chamada Matriz de Euler dada por:

$$\mathbf{W}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Para projetar o controlador baseado na modelagem da energia, neste trabalho é utilizado o modelo de Hamiltoniano de Porta Controlada (HPC) que representa uma larga gama de sistemas, incluindo os sistemas descritos pelas equações de Euler-Lagrange. Estes modelos são caracterizados por representar individualmente as parcelas de interconexão e os elementos dissipativos além de revelar o papel desempenhado pela função de energia na dinâmica do sistema possibilitando assim a incorporação de informação a respeito do sistema. A representação do sistemas através do HPC é essencial na metodologia IDA-PBC e é dada

da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}'(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (5)$$

sendo  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \mathbf{p}]'$  o vetor de estados,  $\mathbf{q}$  representa as coordenadas generalizadas, enquanto  $\mathbf{p} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  é chamado de vetor de momentos generalizados.  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}'(\mathbf{x})$  é uma matriz anti-simétrica e representa a interconexão do sistema. A matriz positiva semi-definida  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}'(\mathbf{x}) \geq 0$  capta os elementos dissipativos do sistema e é chamada de matriz de amortecimento.  $H(\mathbf{x})$  é a função da energia total acumulada no sistema,  $u \in \mathfrak{R}^n$  e  $y \in \mathfrak{R}^n$  são as variáveis de porta de potência, pois o produto de ambas define o fluxo de potência trocado com o ambiente do sistema (Ortega, van der Schaft, Maschke and Escobar, 2002). A energia total armazenada em um sistema mecânico é dada pela soma das suas energias cinética e potencial, ou seja:

$$\begin{aligned}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}' \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q})\end{aligned}\quad (6)$$

na qual  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  representa a energia cinética e  $\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m \cdot g_a \cdot z$  a energia potencial, sendo  $g_a$  a aceleração gravitacional.

### 3 Regulação de Sistemas Sub-atuados Através do IDA-PBC

Nesta seção será apresentado um controlador para o helicóptero quadrirrotor em modo *Hovering* usando a formulação IDA-PBC para sistemas sub-atuados. Primeiramente, o modelo simplificado do quadrirrotor será descrito através do HPC, em seguida uma função de energia desejada será formulada em malha fechada. Por fim, a matriz de inércia e a energia potencial desejadas serão calculadas com o objetivo de solucionar as equações de restrição, apresentadas inicialmente em (Ortega, van der Schaft, Maschke and Escobar, 2002), que originam-se devido a não inversão da matriz de forças  $\mathbf{B}_{\mathcal{J}}$ .

O quadrirrotor pode ser descrito através do modelo (5) desprezando o termo dissipativo, ou seja:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{\mathcal{J}} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{M}} \quad (7)$$

Baseando-se na equação (6), propõe-se a seguinte função de energia em malha fechada:

$$H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}' \mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \mathcal{U}_d(\mathbf{q}) \quad (8)$$

na qual  $M_d = M'_d > 0$  e  $\mathcal{U}_d(\mathbf{q})$  representam a matriz de inércia e a função de energia potencial desejadas a serem definidas, sendo que  $\mathcal{U}_d(\mathbf{q})$  deve ter um mínimo isolado em  $q_*$ . Desta forma o sistema desejado em malha fechada toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_d(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_d(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix}, \quad (9)$$

com

$$\mathbf{J}_d = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_{d12} \\ -\mathbf{J}_{d12}' & \mathbf{J}_{d22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{d22} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

No método de controle IDA-PBC a lei de controle pode ser dividida em duas parcelas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{me}} + \mathbf{u}_{\text{aa}}. \quad (11)$$

A parcela  $\mathbf{u}_{\text{me}}$  é responsável por modificar a função total de energia com o objetivo de se alcançar o equilíbrio desejado  $x_* = (q_*, 0)$ , enquanto  $u_{\text{aa}}$  adiciona amortecimento para se obter estabilidade assintótica (Ortega, Spong, Gomez-Estern and Blankenshtein, 2002). Portanto, igualando (7) e (9) tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{\mathcal{J}} \end{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{M}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_{d12} \\ -\mathbf{J}_{d12}' & \mathbf{J}_{d22} - \mathbf{R}_{d22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (12)$$

Expandindo-se (12) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{p}} H = \mathbf{J}_{d12} \nabla_{\mathbf{p}} H_d \\ & -\nabla_{\mathbf{q}} H + \mathbf{B}_{\mathcal{J}} \mathbf{u}_{\mathbf{M}} = -\mathbf{J}_{d12}' \nabla_{\mathbf{q}} H_d + (\mathbf{J}_{d22} - \mathbf{R}_{d22}) \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{aligned}, \quad (13)$$

A primeira equação gera uma condição simples que admite a seguinte solução:

$$\mathbf{J}_{d12} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_d, \quad (14)$$

e da segunda equação se calcula a equação de controle:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{J}} \mathbf{u}_{\mathbf{M}} = \nabla_{\mathbf{q}} H - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + (\mathbf{J}_{d22} - \mathbf{R}_{d22}) \nabla_{\mathbf{p}} H_d \quad (15)$$

Dado que o amortecimento é adicionado através da realimentação negativa da nova saída passiva,  $\mathbf{y} = \mathbf{B}_{\mathcal{J}}'(\mathbf{q}) \nabla_{\mathbf{p}} H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , tem-se a seguinte parcela do controle  $\mathbf{u}_{\text{aa}}$ :

$$\mathbf{u}_{\text{aa}} = -\mathbf{B}_{\mathcal{J}}' \mathbf{K}_v \nabla_{\mathbf{p}} H_d, \quad (16)$$

sendo assim, escolhendo-se:

$$\mathbf{R}_{d22} = \mathbf{B}_{\mathcal{J}} \mathbf{B}_{\mathcal{J}}' \mathbf{K}_v, \quad (17)$$

é possível reescrever (15) em função apenas da parcela de controle  $\mathbf{u}_{\text{me}}$ :

$$\mathbf{B}_{\mathcal{J}} \mathbf{u}_{\text{me}} = \nabla_{\mathbf{q}} H - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + \mathbf{J}_{d22} \nabla_{\mathbf{p}} H_d. \quad (18)$$

No caso de sistemas totalmente atuados a equação (18) pode ser resolvida unicamente dada uma função  $H_d$  e uma matriz  $\mathbf{J}_{d22}$ . Dado que este trabalho trata de sistemas sub-atuados, tem-se uma matriz  $\mathbf{B}_{\mathcal{J}}$  não inversível e  $\mathbf{u}_{\text{me}}$  só pode influenciar o espaço não nulo de  $\mathbf{B}_{\mathcal{J}}$  (Ortega, Spong, Gomez-Estern and Blankenshtein, 2002). Desta forma, tem-se a seguinte condição a ser satisfeita para qualquer  $\mathbf{u}_{\text{me}}$ :

$$\mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\perp} \{ \nabla_{\mathbf{q}} H - \mathbf{M}_d \mathbf{M}^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + \mathbf{J}_{d22} \nabla_{\mathbf{p}} H_d \} = 0 \quad (19)$$

na qual  $\mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\perp}$  é a chamada matriz *left annihilator* de  $\mathbf{B}_{\mathcal{J}}$ , ou seja,  $\mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\perp} \mathbf{B}_{\mathcal{J}} = 0$ .

Esta etapa representa um grande desafio na aplicação do controle IDA-PBC, tendo em vista a dificuldade de se solucionar EDP's. É possível facilitar essa tarefa separando (19) em duas equações que variam em função apenas da variável independente  $\mathbf{q}$ , como é mostrado abaixo. Primeiramente, separa-se os termos que são dependentes de  $\mathbf{p}$  dos que são independentes de  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{B}_{\mathcal{F}}^{\perp} \{ \nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}) - \mathbf{M}_d\mathbf{M}^{-1}\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}'\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{p}) + 2\mathbf{J}_{d22}\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{p} \} = 0 \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_{\mathcal{F}}^{\perp} \{ \nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U} - \mathbf{M}_d\mathbf{M}^{-1}\nabla_{\mathbf{q}}\mathcal{U}_d \} = 0 \quad (21)$$

A equação (20) varia em função de  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}$  enquanto a equação (21) varia apenas em função de  $\mathbf{q}$ . Comparando estas equações, dada uma matriz  $\mathbf{M}_d$ , a equação (21) é uma simples EDP que pode ser solucionada em função da energia potencial desejada  $\mathcal{U}_d$ . Já a equação (20) deve ser solucionada em função da matriz de inércia desejada  $\mathbf{M}_d$ , sendo que os elementos da matriz anti-simétrica  $\mathbf{J}_{d22}$  podem ser utilizados como parâmetros livres. A fim de facilitar a solução de (20) as seguintes identidades serão aplicadas:

$$\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{s}'\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{s}) = [\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{s})]' \mathbf{s} \quad (22)$$

$$\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{P}(\mathbf{q})\mathbf{s}) = \sum_{k=1}^n \nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{P}_{(\cdot,k)})\mathbf{s}_k \quad (23)$$

para todo  $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^n$  e toda matriz simétrica  $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , onde  $\mathbf{P}_{(\cdot,k)}$  representa a  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{P}$ .

Em seguida, aplica-se a seguinte reparametrização da matriz  $\mathbf{J}_{d22}$  em termos de uma matriz  $\mathbf{U}_k(\mathbf{q}) = -\mathbf{U}_k'(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  de livre escolha:

$$2\mathbf{J}_{d22} = \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_k p_k$$

e obtém-se a seguinte equação de restrição:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{F}}^{\perp} \left\{ \left[ \nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{M}_{(\cdot,k)}^{-1}) \right]' - \mathbf{M}_d\mathbf{M}^{-1} \left[ \nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{M}_{d(\cdot,k)}^{-1}) \right]' + \mathbf{U}_k\mathbf{M}_d^{-1} \right\} = 0 \quad (24)$$

Considerando o problema de *Hovering* proposto nesta seção, linearizou-se o sistema em  $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)$ , obtendo-se uma matriz de inércia,  $\mathbf{M}$ , plana. Escolhendo  $\mathbf{M}_d$  estruturalmente semelhante à  $\mathbf{M}$ , tem-se  $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m, m, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})$  e  $\mathbf{M}_d = \text{diag}(m_d, m_d, m_d, I_{xxd}, I_{yyd}, I_{zzd})$ . Portanto, para que a equação (24) seja satisfeita, as seguintes condições são encontradas:

$$I_{yyd} = \frac{I_{xxd}I_{yy}}{I_{xx}} \quad I_{zzd} = \frac{I_{xxd}I_{zz}}{I_{xx}}.$$

Neste caso as matrizes  $\mathbf{U}_k$  são iguais a zero.

Como o objetivo é estabilizar o quadricóptero a uma certa altura  $z$  e  $\psi$  em torno de zero, tem-se a seguinte função  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  candidata:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}m_d g [k_3(z - z_d)^2 + k_6(\psi - \psi_d)^2] \quad (25)$$

que possui valor mínimo quando  $z = z_d$  e  $\psi = \psi_d$ .  $k_3$  e  $k_6$  são ganhos constantes e positivos.

### 3.1 Resultados de simulação

Os parâmetros do modelo utilizado pelo controlador são:  $b = 9.5e - 6 \text{ N s}^2$ ,  $l = 0.332 \text{ m}$ ,  $k_{\tau} = 1.7e - 7 \text{ N m s}^2$ ,  $m = 2.24 \text{ kg}$ ,  $I_{xx} = I_{yy} = 0.0363 \text{ Kg.m}^2$ ,  $I_{zz} = 0.0615 \text{ Kg.m}^2$  e  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Os ganhos do controlador foram sintonizados com os seguintes valores:  $m_d = m$ ,  $I_{xxd} = 0.3 \times I_{xx}$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $kp1 = 100$ ,  $kp6 = 20$ ,  $kv1 = kv2 = kv3 = kv4 = kv5 = kv6 = 5 \times 10^{12}$ .

O quadricóptero parte da posição  $\mathbf{q} = [0, 0, 0, 0, 0, 0.5]'$  e estabiliza em  $\mathbf{q} = [0, 0, z_d, 0, 0, 0]'$ . O sinal de controle apresenta um valor de pico no instante inicial, porém estabiliza em valores aceitáveis, como pode ser visto na figura (4).

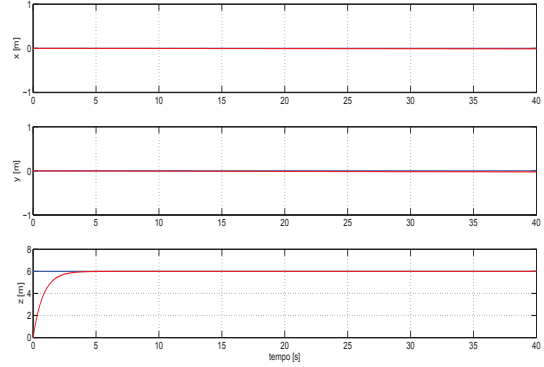


Figura 2: Posição X, Y e Z.

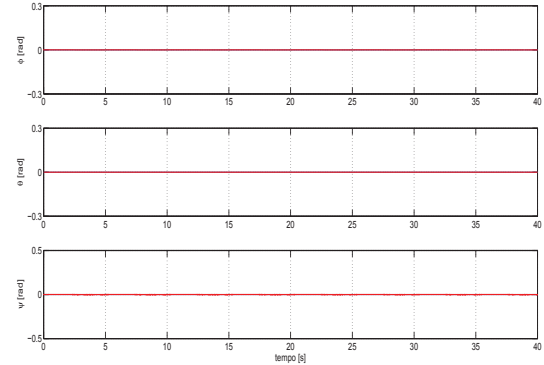


Figura 3: Orientação do Quadricóptero.

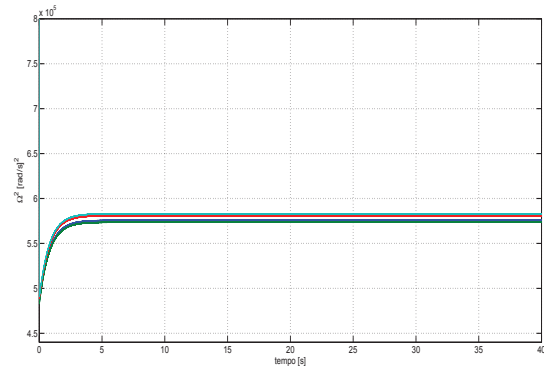


Figura 4: Sinal de controle.

Na próxima seção um novo conjunto de equações de restrição será apresentado. Estas equações surgem de uma formulação diferenciada, cujo objetivo é o desenvolvimento de controladores para seguimento de trajetórias para sistemas sub-atuados.

#### 4 Seguimento de Trajetória para Sistemas Sub-atuados

Nesta seção é apresentado o desenvolvimento de um controlador para seguimento de trajetórias para o helicóptero quadricóptero, onde uma mudança de variáveis é utilizada em malha fechada e um novo conjunto de equações de restrição é obtido. Considera-se um sistema do tipo (7), cuja dinâmica desejada é dada por:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{J}_d(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_d(\bar{\mathbf{x}})] \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} H_d(\bar{\mathbf{x}}) \quad (26)$$

na qual  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}]'$  é o novo conjunto de estados desejados em malha fechada. Pode-se reescrever a equação (12) da seguinte forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}} + \dot{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{J}_d(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_d(\bar{\mathbf{x}})] \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} H_d(\bar{\mathbf{x}}) \quad (27)$$

assim tem-se:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = [\mathbf{J}_d(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{R}_d(\bar{\mathbf{x}})] \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} H_d(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{J}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) + \dot{\bar{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}} \quad (28)$$

A equação (28) pode ser aplicada no caso onde a energia cinética deve ser modelada, como, por exemplo, para a regulação de sistemas sub-atuados ou para seguimento de trajetórias (Wang and Goldsmith, 2008). Se o erro de posição,  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ , é utilizado como novo conjunto de estados,  $\bar{\mathbf{x}}$ , teremos:

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}]', \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d, \quad \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{M}_d \dot{\bar{\mathbf{q}}}$$

onde o vetor  $\mathbf{q}_d$  representa as referências das coordenadas  $x, y, z$  e do ângulo  $\psi$ .

A nova função de energia é dada da seguinte forma:

$$H_d(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{p}} + V_d(\bar{\mathbf{q}})$$

na qual  $H_d(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$  deve ter valor mínimo quando  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$ .

Agora o sistema de equações (13) toma a seguinte forma:

$$-\nabla_{\mathbf{q}} H + \mathbf{B}_{\mathcal{J}} \mathbf{u}_{me} = -\mathbf{J}_{d12}' \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} H_d + \mathbf{J}_{d22} \nabla_{\bar{\mathbf{p}}} H_d + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_d \quad (29)$$

onde  $\dot{\bar{\mathbf{p}}}_d = \dot{\mathbf{p}} - \dot{\bar{\mathbf{p}}}$  é dado por:

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}}_d = \dot{\mathbf{M}} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{M}}_d (\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{M}_d (\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_d).$$

Da primeira equação em (29) tem-se que  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{p} - \dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{J}_{d12} \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}}$  e conseqüentemente  $\mathbf{J}_{d12} = I_{n \times n}$  e da segunda equação de (29) obtém-se:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{J}} \mathbf{u}_{me} = \nabla_{\mathbf{q}} H - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} H_d + \mathbf{J}_{d22} \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_d \quad (30)$$

As equações de restrição (20) e (21) neste caso são definidas como segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\perp} \{ \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}) - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} (\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}}) \\ + 2 \mathbf{J}_{d22} \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_d \} &= 0 \\ \mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\perp} \{ \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U} - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_d \} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

na qual aplicando-se a primeira igualdade de (22) obtém-se:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\perp} \{ [\nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{p})]' \mathbf{p} - [\nabla_{\bar{\mathbf{q}}} (\mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}})]' \bar{\mathbf{p}} \\ + 2 \mathbf{J}_{d22} \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_d \} = 0 \quad (32)$$

A solução das equações de restrição (32) é mais complexa comparada com o caso anterior, não sendo possível simplificar os momentos generalizados, pois  $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{p}$ . Como mencionado anteriormente, a equação dependente de  $\bar{\mathbf{p}}$  deve ser resolvida para  $\mathbf{M}_d$  enquanto  $\mathbf{J}_{d22}$  é de livre escolha. Posteriormente, com a matriz  $\mathbf{M}_d$  encontrada, soluciona-se a equação independente de  $\bar{\mathbf{p}}$  para a nova energia potencial desejada  $\mathcal{U}_d$  que deve ter um mínimo isolado quando  $\bar{\mathbf{q}} = 0$ .

Até o momento desta publicação as equações (31) não foram solucionadas sendo que as simulações apresentadas na sequência consideram os elementos das matrizes  $\mathbf{M}_d$  e  $\mathbf{J}_{d22}$  e a função  $\mathcal{U}_d$  como parâmetros de livre escolha.

#### 4.1 Resultados de simulação

A seguir os resultados obtidos através de simulação são apresentados. As simulações foram realizadas utilizando os parâmetros apresentados na seção 3.1. Isolando o controle em (28) e substituindo juntamente com (16) em (11) obtém-se a seguinte lei de controle:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}_{\mathcal{J}}^{\#} (\nabla_{\mathbf{q}} H - \nabla_{\bar{\mathbf{q}}} H_d + \mathbf{J}_{d22} \mathbf{M}_d^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_d) - \mathbf{B}_{\mathcal{J}}' \mathbf{K}_v \nabla_{\mathbf{p}} H_d \quad (33)$$

Como o objetivo do controlador é levar o erro de posição dos estados  $x, y, z$  e  $\psi$  a zero, propõe-se a seguinte função  $\mathcal{U}_d$ :

$$\mathcal{U}_d = \frac{1}{2} [kp1(x - x_d)^2 + kp2(y - y_d)^2 \\ + kp3(z - z_d)^2 + kp6(\psi - \psi_d)^2] \quad (34)$$

Os ganhos  $kp$  ponderam os erros de posição e os ganhos da matriz diagonal  $\mathbf{K}_v \in \mathcal{R}^{n \times n}$  ponderam os erros de velocidade. A matriz  $\mathbf{J}_{d22}$  na simulação a seguir é igual a zero. Os ganhos do controlador foram ajustados com os seguintes valores:  $m_d = 0.8 \times m$ ,  $I_{xxd} = 0.4 \times I_{xx}$ ,  $I_{yyd} = 0.4 \times I_{yy}$ ,  $I_{zsd} = 0.4 \times I_{zz}$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $kp1 = kp2 = 2$ ,  $kp3 = 10$ ,  $kp6 = 0.4$ ,  $kv1 = kb2 = 7e10$ ,  $kv3 = kv4 = kv5 = 5e10$  e  $kv6 = 5e11$ .

Através da figura (5) é possível observar o seguimento da trajetória no espaço tridimensional, enquanto que através da figura (6), observa-se que o controlador segue também a referência de  $\psi$  enquanto estabiliza os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  em zero. O modelo utilizado para simular o comportamento do helicóptero quadricóptero é apresentado detalhadamente em (Raffo, 2011).



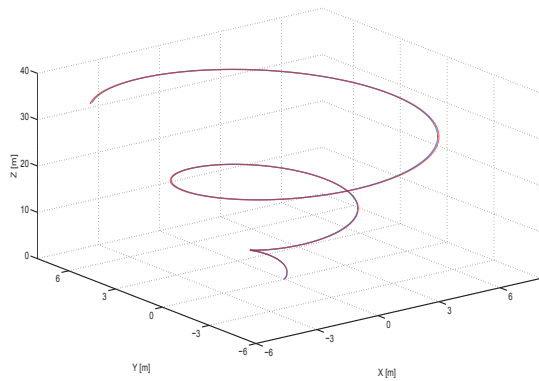


Figura 5: Posição X, Y e Z.

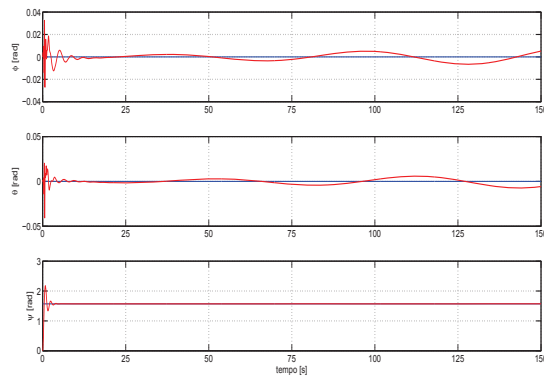


Figura 6: Orientação do Quadrirotor.

Na figura (7) são ilustradas as velocidades ao quadrado de cada rotor, estando estas dentro de valores aceitáveis. Nota-se que o controlador é robusto o suficiente para lidar com incertezas no modelo.

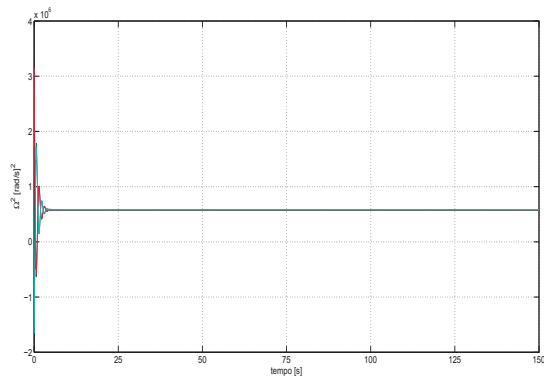


Figura 7: Sinal de controle.

## 5 Conclusões

Mostrou-se através deste trabalho o desenvolvimento de uma estratégia de controle fazendo uso da metodologia IDA-PBC para sistemas sub-atuados para solucionar os problemas de regulação e seguimento de trajetórias de um helicóptero quadrirotor. A estratégia utilizada dispensa a utilização de controladores em cascata e de espaço de estados aumentado. Isto é possível

devido a uma mudança na estrutura mecânica do helicóptero, que é utilizada somente para fins de projeto do controlador. Além disso, o problema da solução das equações de restrição, que surgem devido ao fato do sistema ser sub-atuado, é apresentado. O controlador para regulação da coordenada z foi desenvolvido satisfazendo as equações de restrição com o sistema linearizado, sendo que para seguimento de x, y e z só foi possível considerando no projeto as matrizes de interconexão e inércia desejadas como parâmetros livres. O desempenho dos controladores em ambos os casos se mostraram aceitáveis. O problema de regulação e seguimento de trajetória satisfazendo as equações de restrição segue em aberto.

## Agradecimentos

Os autores desejam agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo financiamento deste trabalho.

## Referências

- Ortega, R., Spong, M., Gomez-Estern, F. and Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **47**(8): 1218–1233.
- Ortega, R., van der Schaft, A., Maschke, B. and Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems, *Automatica* **38**(4): 585 – 596.
- Raffo, G. V. (2011). *Robust Control Strategies for a QuadRotor Helicopter. An Underactuated Mechanical System*, PhD thesis, Universidad de Sevilla, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Sevilla, España.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G. and Rubio, F. R. (2010). An integral predictive/nonlinear control structure for a quadrotor helicopter, *Automatica* **46**(1): 29 – 39.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G. and Rubio, F. R. (2011). Nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  Controller for the Quad-Rotor Helicopter with Input Coupling, *18th World Congress, IFAC 2011*, Milano, Italy.
- Wang, Z. and Goldsmith, P. (2008). Modified energy-balancing-based control for the tracking problem, *Control Theory Applications, IET* **2**(4): 310–312.