RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO DE SISTEMAS INCERTOS UTILIZANDO UM DIFERENCIADOR EXATO NÃO-HOMOGÊNEO

Paulo Victor N. M. Vidal*, Andrei Battistel†, Eduardo V. L. Nunes†

*Dept. de Eng. Eletrônica e de Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro

†Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

Emails: `paulovictornmv@poli.ufrj.br, battistel@ufrj.br, eduardo@coep.ufrj.br`

Abstract— This work adresses the problem of global output tracking control for linear uncertain plants with arbitrary relative degree using output feedback sliding mode control. We propose a modification on a hybrid compensator based on a convex combination of a lead filter and a robust exact differentiator (RED) to overcome the relative degree obstacle. It is also noted that the modified scheme leads to a better control performance. Simulations confirm the proposed control efficiency.

Keywords— uncertain systems, sliding mode control, output-feedback, global tracking, exact differentiator

Resumo— Este trabalho aborda o problema de controle de rastreamento de saída global para plantas incertas com grau relativo arbitrário usando controle por modos deslizantes via realimentação de saída. Para contornar o problema do grau relativo, é proposta uma modificação em um compensador híbrido baseado em uma combinação convexa de um filtro de avanço de fase com um diferenciador robusto exato. Ainda, observa-se que o esquema modificado possibilita uma melhora no desempenho do controle. Os resultados obtidos são confirmados por simulações numéricas.

Palavras-chave— sistemas incertos, controle por modos deslizantes, realimentação de saída, rastreamento global, diferenciador exato

1 Introdução

O controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* - SMC) é uma técnica muito eficiente para controlar plantas incertas, incluindo dinâmicas não modeladas, variação paramétrica e perturbações externas (Edwards and Spurgeon, 1998). Um dos principais problemas é a possibilidade da ocorrência de *chattering* ocasionado pelo chaveamento em alta frequencia inerente ao SMC.

O controle por modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes - HOSM), proposto em (Levant, 1993), generaliza o conceito de modos deslizantes convencionais, preservando as principais vantagens do controle SMC convencional e fornecendo uma acurácia ainda maior. Dentre os controladores baseados em HOSM, destaca-se o *Super Twisting Control* (STC) (Levant, 1998; Fridman and Levant, 2002) por ser robusto e permitir controle suave para sistemas com grau relativo um, eliminando o problema do *chattering.* Um aspecto interessante deste controlador é que ele pode ser utilizado para desenvolver diferenciadores robustos e exatos (*Robust Exact Differentiator* - RED), capazes não só de obter derivadas exatas, como também apresentar performance assintoticamente ótima na presença de pequenos ruídos de entrada (Levant, 1998; Levant, 2003).

Em (Nunes et al., 2009), foi proposto um controlador por modos deslizantes baseado em um estimador híbrido, denominado de GRED, para resolver o problema de rastreamento global e exato para plantas lineares, monovariáveis e incertas com grau relativo arbitrário. O estimador híbrido é baseado num esquema de chaveamento que combina um RED com um filtro de avanço de fase, de forma a garantir estabilidade global e assegurar um rastreamento assintoticamente exato.

Recentemente, foi proposto em (Moreno and Osorio, 2008; Dávila et al., 2010) uma modificação para o STC convencional, o *Variable Gain Super Twisting Control* (VGSTC). Essa modificação resultou em uma melhora no desempenho do controlador a partir da introdução de novos termos, além de aumentar sua robustez com relação a incertezas/perturbações. Seguindo este mesmo princípio, foi proposto em (Levant, 2009) um novo diferenciador, adicionando termos lineares ao RED convencional. Esses termos possibilitam uma convergência mais rápida quando o sistema se encontra distante do equilíbrio, ao mesmo tempo que podem ser desprezados numa vizinhança suficientemente pequena em torno do equilíbrio. Desta forma, a convergência em tempo finito do RED convencional é preservada, melhorando seu desempenho.

Este artigo representa uma tentativa preliminar para melhorar o desempenho do esquema proposto em (Nunes et al., 2009) por meio de uma modificação do compensador híbrido que consiste em substituir o RED convencional por um RED modificado. Para esta finalidade o desenvolvimento teórico detalhado foi restrito ao caso de plantas com grau relativo dois. A extensão para plantas incertas com grau relativo arbitrário parece ser imediata usando os resultados apresentados em (Levant, 2009; Nunes et al., 2013).

2 Definição do Problema

Considera-se uma planta linear e invariante no tempo (*Linear Time Invariant* - LTI), incerta e monovariável, representada pela seguinte relação entrada-saída:

$$y_p = G_p(s)[u+d], \quad G_p = K_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \tag{1}$$

onde $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y_p \in \mathbb{R}$ é a saída, $d \in \mathbb{R}$ é uma perturbação de entrada, $K_p \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são polinômios mônicos. Considerando o vetor $x_p \in \mathbb{R}^n$, a planta pode ser representada pela seguinte equação de estados:

$$\dot{x}_p = A_p x_p + b_p[u+d], \quad y_p = h_p^T x_p \tag{2}$$

As seguintes hipóteses são consideradas

(A1) $G_p(s)$ é uma planta de fase mínima.

(A2) A planta é controlável e observável.

(A3) A ordem n, o grau relativo ρ e o sinal do ganho de alta frequência K_p da planta são conhecidos.

(A4) A perturbação de entrada é incerta, localmente integrável e uniformemente limitada por $\bar{d}(t) \geq |d(t)|$, $\forall t$, sendo $\bar{d}(t)$ um limitante conhecido.

O sinal de referência y_m é gerado pelo seguinte modelo:

$$y_m = M(s)r, \quad M(s) = \frac{K_m}{(s+a_m)L(s)} \tag{3}$$

onde K_m, $a_m > 0 \in \mathbb{R}$ e $L(s)$ é um polinômio Hurwitz dado por:

$$L(s) = s^{(\rho-1)} + l_{(\rho-2)}s^{(\rho-2)} + \ldots + l_1 s + l_0 \tag{4}$$

O objetivo é projetar uma lei de controle $u(t)$ de modo que o erro de rastreamento de saída $e \triangleq y_p - y_m$ tenha uma convergência assintótica ou em tempo finito para zero. Esse objetivo deve ser alcançado para condições iniciais e sinais de referência r (contínuos por partes e uniformemente limitados) arbitrários.

A lei de controle que iguala a função de transferência de malha fechada ao modelo de referência $M(s)$ é dada por $u^* = {\theta^*}^T\omega$, onde ${\theta^*}^T = [{\theta_1^*}^T \; {\theta_2^*}^T \; \theta_3^* \; \theta_4^*]^T$ é o vetor de parâmetros, com θ_1^*, $\theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$, θ_3^*, $\theta_4^* \in \mathbb{R}$, e $\omega = [\omega_u^T \; \omega_y^T \; y_p \; r]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor regressor, com vetores ω_u e ω_y dados pelos filtros:

$$\dot{\omega}_u = \Lambda\omega_u + gu, \quad \dot{\omega}_p = \Lambda\omega_p + gy_p \tag{5}$$

onde $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ é Hurwitz e $g \in \mathbb{R}^{n-1}$ é escolhido tal que (Λ, g) seja controlável. De acordo com (Nunes et al., 2009), a dinâmica dos estados do erro de saída é dada por:

$$\dot{x}_e = A_c x_e + k^* b_c[u - {\theta^*}^T\omega + d_f], \quad e = h_c^T x_e \tag{6}$$

Ou em termos de relação entrada/saída:

$$e = k^* M(s)[u - {\theta^*}^T\omega + d_f] \tag{7}$$

onde $k^* = 1/\theta_4^*$, $d_f(t) = W_d(t) * d(t)$ e $W_d(t)$ igual a resposta ao impulso de $W_d(s) = 1 – {\theta_1^*}^T(sI – \Lambda)^{-1}g$.

3 Controle por Modos Delizantes

A estratégia utilizada por este controlador é definir uma variável de deslizamento σ em função do erro de rastreamento de saída, de modo que, ao se alcançar em tempo finito a superfície de deslizamento $\sigma = 0$, o erro evolua para zero. Para isso, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\sigma\dot{\sigma} \leq -\delta|\sigma|, \quad \delta > 0 \tag{8}$$

A variável de deslizamento pode ser definida, assumindo que a função de transferência $M(s)L(s)$ é SPR (*Strictly Positive Real*), como:

$$\sigma = L(s)e \tag{9}$$

O que, considerando as equações (3) e (7), pode ser reescrito como:

$$\sigma = k^* \frac{K_m}{s+a_m}[u - {\theta^*}^T\omega + d_f] \tag{10}$$

A equação pode ser escrita no domínio do tempo:

$$\dot{\sigma} = -a_m\sigma + k^* K_m[u - {\theta^*}^T\omega + d_f] \tag{11}$$

É possível projetar um controlador para esse sistema na forma $u = -f(t)\,\text{sign}(\sigma)$, onde $f(t)$ é uma função de modulação. Considerando esse controlador:

$$\dot{\sigma}\sigma = -a_m\sigma^2 - k^* K_m[f(t)|\sigma| + ({\theta^*}^T\omega - d_f)\sigma] \tag{12}$$

Logo, a função de modulação $f(t)$ deve satisfazer à condição (Nunes et al., 2009):

$$f(t) \geq |{\theta^*}^T\omega - d_f| + \delta \tag{13}$$

Onde δ é uma constante positiva. De modo a satisfazer essa condição, a função de modulação é definida como:

$$f(t) = \bar{\theta}^T[|\omega_1| \ldots |\omega_{2n}|]^T + \hat{d}(t) + \delta \tag{14}$$

Onde $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^{2n}$ é um vetor conhecido formado por limitantes superiores elemento a elemento de θ^*, e $\hat{d}(t)$ é um limitante superior para $|d_f(t)|$, dado por:

$$\hat{d}(t) = \bar{d}(t) + \frac{c_d}{s+\lambda_d} * \bar{d}(t) \tag{15}$$

Sendo $\lambda_d = \min_k\{-\operatorname{Re}(\lambda_k)\}$, onde λ_k são os autovalores de Λ. O problema desse controlador é a necessidade de se ter a variável de deslizamento diretamente disponível. Reescrevendo a equação (9) no domínio do tempo:

$$\sigma = e^{(\rho-1)} + l_{(\rho-2)}e^{(\rho-2)} + \ldots + l_1\dot{e} + l_0 e \quad (16)$$

Ou seja, para se aplicar o controlador u, é necessário que estejam disponíveis em tempo finito as derivadas do erro. Dois possíveis estimadores para as derivadas do erro são o RED e filtro lead.

4 Diferenciadores Robustos e Exatos

Uma forma de se obter a variável de deslizamento a partir de estimativas das derivadas do erro é utilizando diferenciadores robustos e exatos. Uma vantagem da utilização dos REDs é que eles tem uma performance assintoticamente ótima na presença de pequenos ruídos de entrada mensuráveis no sentido de Lebesgue, alcançando rastreamento exato na ausência de tais ruídos. O RED não-homogêneo, recentemente proposto em (Levant, 2009), pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_0 = \;& v_0, \quad v_0 = -\lambda_0|\zeta_0 - e|^{\frac{n}{n+1}}\operatorname{sign}(\zeta_0 - e) \\
& \qquad\quad -\mu_0(\zeta_0 - e) + \zeta_1 \\
& \vdots \\
\dot{\zeta}_i = \;& v_i, \quad v_i = -\lambda_i|\zeta_i - v_{i-1}|^{\frac{n-i}{n-i+1}}\operatorname{sign}(\zeta_i - v_{i-1}) \\
& \qquad\quad -\mu_i(\zeta_i - v_{i-1}) + \zeta_{i+1} \\
& \vdots \\
\dot{\zeta}_n = \;& -\lambda_n\operatorname{sign}(\zeta_n - v_{n-1}) - \mu_n(\zeta_n - v_{n-1})
\end{aligned} \quad (17)$$

Sendo esse diferenciador não-homogêneo uma generalização do RED convencional (Levant, 1998; Levant, 2003) a partir da introdução de termos lineares. Esses termos possibilitam que o diferenciador modificado apresente uma convergência mais rápida do que o RED convencional. Fazendo $\mu_i = 0,\ \forall i$ o diferenciador (17) se iguala ao RED convencional.

Teorema 1 *(Levant, 2003): Considere o sistema (17) para $\mu_i = 0,\ \forall i$. Seja o sinal de entrada $e(t)$ uma função definida em $[0,\infty)$ com a derivada de ordem n tendo uma constante de Lipschitz $C_{n+1} > 0$. Se os parâmetros λ_i, $i = 0,\ldots,n$ forem escolhidos apropriadamente, então na ausência de ruído de entrada as seguintes igualdades são satisfeitas após um processo transiente em tempo finito:*

$$\zeta_0 = e(t), \zeta_i = v_{i-1} = e^{(i)}(t),\ i = 1,\ldots,n. \quad (18)$$

Prova: ver (Levant, 2003) □

Teorema 2 *(Levant, 2009): Seja a sequência positiva $\{\lambda_i\}$ que garante uma convergência em tempo finito ao diferenciador (17) com $\mu_i = 0, \forall i$. Pode-se escolher recursivamente uma sequência $\{\mu_i\}$ que garanta uma convergência em tempo finito ao diferenciador (17) na ausência de ruídos.*

Prova: ver (Levant, 2009) □

Lema 3 *Considere o sistema* (17)*, com estados $\zeta = [\zeta_0 \ldots \zeta_n]^T$. Se $|e^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1}, \forall t$ (finito), para alguma constante positiva K_{n+1}, então $\zeta(t)$ não pode divergir em tempo finito.*

Prova: *Ver apêndice* □

O diferenciador (17) de ordem $(\rho - 1)$ pode ser utilizado para gerar a seguinte estimativa para a variável de deslizamento ideal σ:

$$\hat{\sigma}_r = \zeta_{\rho-1} + l_{\rho-2}\zeta_{\rho-2} + \ldots + l_1\zeta_1 + l_0\zeta_0 \quad (19)$$

Entretanto, os Teoremas 1 e 2 apenas garantem convergência local dos estados do erro para zero, já que $e^{(\rho)}(t)$ deve ser uniformemente limitado.

5 Filtro de Avanço de Fase (Filtro Lead)

A variável de deslizamento também pode ser obtida utilizando um filtro de avanço de fase (filtro lead) para gerar estimativas das derivadas do erro. Para plantas com grau relativo $\rho > 1$ a variável de deslizamento pode ser estimada por:

$$\hat{\sigma}_l = L_a(s)e, \quad L_a(s) = \frac{L(s)}{F(\tau s)} \quad (20)$$

Onde $F(\tau s) = (\tau s + 1)^{\rho-1},\ \tau > 0$. O filtro lead (20) também pode ser representado pela equação de estados:

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} -\bar{a}_{\rho-2} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\bar{a}_{\rho-3} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{a}_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\bar{a}_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\vartheta + \begin{bmatrix} \bar{b}_{\rho-2} \\ \bar{b}_{\rho-3} \\ \vdots \\ \bar{b}_1 \\ \bar{b}_0 \end{bmatrix} e$$

$$\hat{\sigma}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}\vartheta + \frac{1}{\tau^{\rho-1}}e \quad (21)$$

sendo que $\bar{a}_i = \mathcal{C}^{\rho-1}_{\rho-1-i}$, $\mathcal{C}^n_k = n!/(k!(n-k)!)$ e $\bar{b}_i = (l_i - \bar{a}_i/\tau^{(\rho-1-i)})/\tau^{i+1}$. Definindo o erro de estimação do filtro lead $\varepsilon_l = \hat{\sigma}_l - \sigma$ e aplicando a seguinte transformação de estados:

$$x_{\varepsilon_i} = \vartheta_i + \frac{1}{\tau^{(\rho-i)}}\left(\sum_{k=0}^{i-1} l_{\rho-i+k}e^{(k)}\right) - \mathcal{C}^{\rho-1}_{\rho-i}\sigma,$$

$$i = 1,\ldots,\rho-1 \quad (22)$$

onde $\varepsilon_l = x_{\varepsilon_1}$ e $l_{\rho-1} = 1$. A dinâmica do erro de estimação é dada por:

$$\dot{x}_\varepsilon = \frac{1}{\tau}A_\varepsilon x_\varepsilon + b_\varepsilon\dot{\sigma}, \quad \varepsilon_l = h_\varepsilon^T x_\varepsilon \quad (23)$$

sendo que:

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} -a_{\rho-2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{\rho-3} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ b_\varepsilon = \begin{bmatrix} -b_{\rho-2} \\ -b_{\rho-3} \\ \vdots \\ -b_1 \\ -b_0 \end{bmatrix}$$

$$h_\varepsilon^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

onde $a_i = \mathcal{C}^{\rho-1}_{\rho-1-i}$ e $b_i = \mathcal{C}^{\rho-1}_{i+1}$. O sinal de controle pode ser projetado a partir da estimativa da variável de deslizamento utilizando o filtro lead. Considerando a perturbação de saída $\beta_\alpha(t)$, tem-se:

$$u = -f(t)\,\text{sign}(\hat{\sigma}_l + \beta_\alpha) \quad (25)$$

Teorema 4 *(Nunes et al., 2009): Considere a planta* (2) *e o modelo de referência* (3)*, com a lei de controle dada por* (20) *e* (25)*. Considere que as hipóteses (A1)–(A4) e que a desigualdade* (13) *sejam satisfeitas. Se a perturbação $\beta_\alpha(t)$ for absolutamente contínua e limitada por $|\beta_\alpha(t)| \leq \tau K_R$, $K_R > 0$, então, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, o sistema de malha fechada* (6), (16), (23) *e* (25)*, com estados $z^T = [x_e^T\ x_\varepsilon^T]$, é uniformemente GEpS (*Globally Exponentially practically Stable*) com respeito a um conjunto residual de ordem τ, isto é, existem constantes positivas c_z e a tal que $\forall z(t_0)$, $\forall t \geq t_0 \geq 0$, $|z(t)| \leq c_z e^{-a(t-t_0)}|z(t_0)| + \mathcal{O}(\tau)$.*

Prova: ver (Nunes et al., 2009) □

Corolário 5 *(Nunes et al., 2009): Para todo $R > 0$, deve existir $\tau > 0$ suficientemente pequeno de modo que, para um intervalo de tempo finito T, o vetor de estados do erro $z(t)$ seja levado para um conjunto invariante $D_R := \{z : |z| \leq R\}$.*

Corolário 6 *(Nunes et al., 2009): O sinal $e^{(\rho)}(t)$ é uniformemente limitado. Além disso, se $|x_e(t)| \leq R$, $\forall t \geq T$, então deve existir uma constante positiva C_ρ tal que:*

$$\left\| e^{(\rho)}_{[T,t]} \right\| \leq C_\rho \quad (26)$$

Prova: ver (Nunes et al., 2009) □

6 RED Global (GRED)

Visando alcançar uma convergência global dos estados do erro para zero, o filtro lead e o RED podem ser combinados. O GRED, proposto em(Nunes et al., 2009), é um estimador híbrido obtido através da combinação convexa das estimativas do filtro lead (20) e do RED (19):

$$\hat{\sigma}_g = \alpha(\tilde{\nu}_{rl})\hat{\sigma}_l + [1 - \alpha(\tilde{\nu}_{rl})]\hat{\sigma}_r \quad (27)$$

onde $\tilde{\nu}_{rl} = \hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_l$, e $\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$ é uma função de chaveamento contínua, que assume valores no intervalo $[0, 1]$. O RED convencional ($\mu_i = 0$, $\forall i$) foi utilizado para gerar a estimativa $\hat{\sigma}_r$. Aqui, a estimativa $\hat{\sigma}_r$ será gerada pelo RED modificado (17).

A idéia principal do GRED é projetar uma lei de chaveamento $\alpha(\tilde{\nu}_{rl})$ tal que leve primeiramente os estados do erro para um conjunto invariante D_R, onde a convergência do RED é garantida e um limitante superior $\bar{\varepsilon}$ para o erro de estimação do filtro lead pode ser determinado. Depois, a lei de chaveamento deve assegurar que apenas o RED seja utilizado para estimar a variável de deslizamento ideal σ.

A lei de chaveamento foi proposta de modo a considerar o comportamento do RED como uma perturbação de saída uniformemente limitada de ordem τ. Desta forma, de acordo com o Teorema 4 e caso os sinais do sistema se mantenham limitados, o sistema pode ser considerado GEpS com respeito a um conjunto residual de ordem τ e sua convergência para um conjunto invariante D_R é garantida. A lei de chaveamento é projetada de modo que $|\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_l| \leq \tau K_R$:

$$\alpha(\tilde{\nu}_{rl}) = \begin{cases} 0, & |\tilde{\nu}_{rl}| < \varepsilon_M - \Delta \\ (|\tilde{\nu}_{rl}| - \varepsilon_M + \Delta)/\Delta, & \varepsilon_M - \Delta \leq |\tilde{\nu}_{rl}| < \varepsilon_M \\ 1, & |\tilde{\nu}_{rl}| \geq \varepsilon_M \end{cases} \quad (28)$$

Onde $0 < \Delta < \varepsilon_M$ é utilizada para suavizar a função de chaveamento, e $\varepsilon_M := \tau K_R$, com K_R sendo escolhido de modo que $\varepsilon_M - \Delta > \bar{\varepsilon}_l$. Após um tempo finito, essa condição implica que $\alpha = 0$, ou seja, apenas o RED é utilizado, assegurando uma estimação exata da variável de deslizamento ideal σ.

Utilizando a função de modulação definida em (14), a lei de controle pode ser dada por:

$$u = -f(t)\,\text{sign}(\hat{\sigma}_g) \quad (29)$$

Teorema 7 *Considere a planta* (2) *e o modelo de referência* (3)*, com a lei de controle dada por* (27) *e* (29)*. A função de chaveamento $\alpha(.)$ é definida em* (28)*. Considere as suposições feitas na seção 2 e que a desigualdade* (13) *seja satisfeita. Para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, o sistema de malha fechada* (6), (16), (23) *e* (29) *é GEpS com respeito a um conjunto residual de ordem τ. Além disso, para K_R, λ_i e μ_i ($i = 1, \dots, \rho-1$) apropriadamente escolhidos, a estimação da variável de deslizamento ideal σ se torna exata, sendo feita exclusivamente pelo RED ($\alpha(.) = 0$) após um tempo finito. Então, o vetor de estados do erro de malha fechada $z^T = [x_e^T\ x_\varepsilon^T]$, e portanto o erro de rastreamento de saída e, tendem exponencialmente para zero.*

Prova: (segue os mesmos passos da prova do (Nunes et al., 2009, Teorema 3) □

7 Resultados de Simulações

Primeiramente, pretende-se comparar o desempenho do RED modificado ao do RED convencional para o caso em que se usa apenas o diferenciador para estimar a variável de deslizamento σ, ou seja, para o caso em que $u = -f(t)\,\mathrm{sign}(\hat{\sigma}_r)$. A planta e a perturbação de entrada são assumidas incertas e dadas por:

$$G_p(s) = \frac{2}{(s+1)(s-2)}, \quad d(t) = \mathrm{sqw}(5t) \tag{30}$$

Onde sqw(.) representa uma onda quadrada unitária. O sinal e o modelo de referência são dados por $r(t) = \sin(0.5t)$ e:

$$M(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad L(s) = (s+1) \tag{31}$$

Outros parâmetros de projeto são $\bar{\theta}^T = [3,\ 0.2,\ 5,\ 0.5]$ e $\hat{d} + \delta = 1$. Os parâmetros dos RED's são $\lambda_0 = 1.5C_2^{1/2}$, $\lambda_1 = 1.1C_2$, com $C_2 = 10$, além de $\mu_0 = 6$ e $\mu_1 = 3$ para o diferenciador modificado. As simulações são realizadas utilizando o Método de Euller com passo de integração 10^{-4}.

A Figura 1 apresenta os resultados para condições iniciais da planta dadas por $y_p(0) = 0.3$ e $\dot{y}_p(0) = 1$. Nota-se uma convergência mais rápida para o sistema operando com o RED modificado. Isso ocorre devido aos termos lineares adicionais, que possibilitam maior rapidez diante de erros maiores.

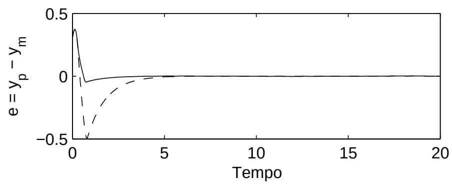

Figura 1: Erro de rastreamento de saída $e = y_p - y_m$ para condições iniciais $y_p(0) = 0.3$ e $\dot{y}_p(0) = 1$ e controlador $u = -f(t)\,\mathrm{sign}(\hat{\sigma}_r)$, considerando RED's convencional $(--)$ e modificado $(-)$.

Considerando as condições iniciais $y_p(0) = 1$ e $\dot{y}_p(0) = 6$, é apresentado na Figura 2 o resultado do erro de rastreamento de saída. Neste caso, o RED convencional não é capaz de garantir a convergência do erro para zero, o que comprova a melhora de desempenho e robustez no diferenciador quando são adicionados os termos lineares.

Para as condições iniciais $y_p(0) = 3$ e $\dot{y}_p(0) = 6$, a Figura 3 mostra que o RED modificado não é suficiente para garantir a convergência do sistema.

Utiliza-se agora o GRED para gerar a lei de controle $u = -f(t)\,\mathrm{sign}(\hat{\sigma}_g)$, com os parâmetros da função de chaveamento dados por $K_R = 20$, $\varepsilon_M = 20\tau$ e $\Delta = 5\tau$. A Figura 4 mostra que o GRED alcança um rastreamento preciso, apesar da perturbação $d(t)$. O gráfico da função de chaveamento $\alpha(.)$ mostra que, inicialmente, apenas o filtro lead é utilizado para estimar σ, sendo substituído ao longo do tempo pelo RED, que garante a exatidão da estimativa de σ após um tempo finito.

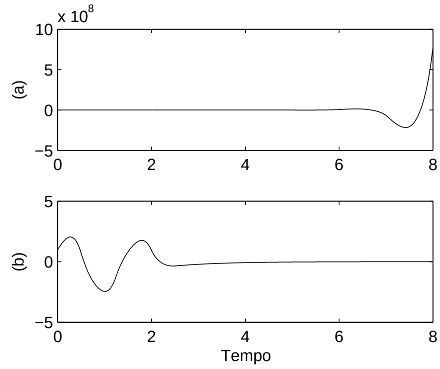

Figura 2: Erro de rastreamento de saída $e = y_p - y_m$ para condições iniciais $y_p(0) = 1$ e $\dot{y}_p(0) = 6$ e controlador $u = -f(t)\,\mathrm{sign}(\hat{\sigma}_r)$, considerando RED's convencional (a) e modificado (b).

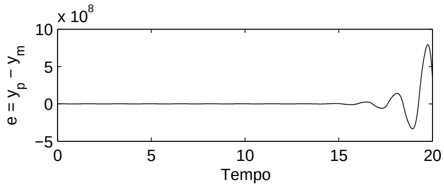

Figura 3: Erro de rastreamento de saída $e = y_p - y_m$ para condições iniciais $y_p(0) = 1$ e $\dot{y}_p(0) = 6$ e controlador $u = -f(t)\,\mathrm{sign}(\hat{\sigma}_r)$, considerando RED modificado.

8 Conclusão

Este trabalho apresenta um controlador baseado em uma modificação do RED global através do qual se obteve um melhor desempenho em comparação ao algoritmo convencional. Esta técnica permite o rastreamento de saída global para plantas incertas com grau relativo arbitrário usando controle por modos deslizantes com realimentação de saída. O estimador híbrido é utilizado para contornar o obstáculo do grau relativo e os resultados são testados por simulações numéricas. Trabalhos futuros incluem a demonstração formal do algoritmo na forma mais geral e a aplicação em sistemas multivariáveis.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPERJ, CAPES e pelo CNPq.

Apêndice

Prova do Lema 3

Neste trabalho preliminar, apresenta-se a prova para o diferenciador de primeira ordem. Embora a aplicação deste seja restrita a sistemas de grau relativo $\rho = 2$, uma prova mais geral pode ser obtida seguindo os passos de (Nunes et al., 2013). Considerando o diferenciador de primeira ordem na forma recursiva:

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{\zeta}_0 = & v_0 \\ v_0 = & -\lambda_0 |\zeta_0 - e|^{1/2} \,\mathrm{sign}(\zeta_0 - e) + \\ & -\mu_0(\zeta_0 - e) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = & -\lambda_1 \,\mathrm{sign}(\zeta_1 - v_0) - \mu_1(\zeta_1 - v_0) \end{array} \right. \tag{32}$$

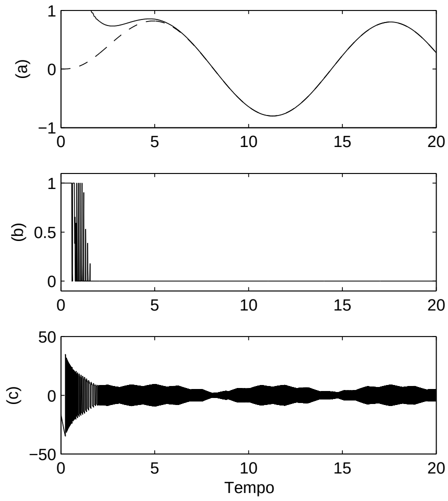

Figura 4: Sistema com GRED. (a) Rastreamento de saída: $(-)y_p$, $(--)y_m$; (b) Função de chaveamento $\alpha(.)$; (c) Sinal de controle $u = -f(t)\,\text{sign}(\hat{\sigma}_g)$.

Este poder ser escrito na forma não recursiva:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0 = & v_0 \\ v_0 = & -\lambda_0|\zeta_0 - e|^{1/2}\,\text{sign}(\zeta_0 - e) + \\ & -\mu_0(\zeta_0 - e) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = & -\lambda_1\,\text{sign}(\lambda_0|\zeta_0 - e|^{1/2}\,\text{sign}(\zeta_0 + \\ & +\mu_0(\zeta_0 - e)) - \mu_1(\lambda_0|\zeta_0 - e|^{1/2}\,\text{sign}(\zeta_0 + \\ & -e) + \mu_0(\zeta_0 - e)) \end{cases} \tag{33}$$

Nota-se que $\text{sign}(\lambda_0|\zeta_0 - e|^{1/2}\,\text{sign}(\zeta_0 - e) + \mu_0(\zeta_0 - e))$ possui o mesmo sinal de $(\zeta_0 - e)$, assim:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_0 = & v_0 \\ v_0 = & -\lambda_0|\zeta_0 - e|^{1/2}\,\text{sign}(\zeta_0 - e) + \\ & -\mu_0(\zeta_0 - e) + \zeta_1 \\ \dot{\zeta}_1 = & -\lambda_1\,\text{sign}(\zeta_0 - e) \\ & -\mu_1(\lambda_0|\zeta_0 - e|^{1/2}\,\text{sign}(\zeta_0 - e) + \\ & +\mu_0(\zeta_0 - e)) \end{cases}$$

Introduzindo $\eta_i = \zeta_i - e^{(i)}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_0 &= -\lambda_0|\eta_0|^{1/2}\,\text{sign}(\eta_0) - \mu_0(\eta_0) + \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 &= -\lambda_1\,\text{sign}(\eta_0) + \\ &- \mu_1(\lambda_0|\eta_0|^{1/2}\,\text{sign}(\eta_0) + \mu_0\eta_0) - \ddot{e} \end{aligned}$$

As equações podem ser reescritas na forma:

$$\dot{\eta}_i = -a_i(\eta_0)\eta_0 - b_i(\eta_0) + \eta_{i+1} \tag{34}$$

onde tem-se

$$a_0(\eta_0) = \begin{cases} \mu_0, & |\eta_0| \le 1 \\ \frac{\lambda_0}{|\eta_0|^{1/2}} + \mu_0, & |\eta_0| > 1 \end{cases}$$

$$b_0(\eta_0) = \begin{cases} \lambda_0|\eta_0|^{1/2}\,\text{sign}(\eta_0), & |\eta_0| \le 1 \\ 0, & |\eta_0| > 1 \end{cases}$$

Pode ser verificado que $a_0(\eta_0) < \lambda_0 + \mu_0$ e $|b_0(\eta_0)| \le \lambda_0$. Tem-se ainda:

$$a_1(\eta_0) = \begin{cases} \mu_1\mu_0, & |\eta_0| \le 1 \\ \frac{\lambda_1}{|\eta_0|} + \frac{\mu_1\lambda_0}{|\eta_0|^{1/2}} + \mu_1\mu_0, & |\eta_0| > 1 \end{cases}$$

$$b_1(\eta_0) = \begin{cases} \lambda_1\,\text{sign}(\eta_0) + \\ \mu_1\lambda_0|\eta_0|^{1/2}\,\text{sign}(\eta_0) + \ddot{e}, & |\eta_0| \le 1 \\ \ddot{e}\ , & |\eta_0| > 1 \end{cases}$$

Sabe-se por hipótese que $|\ddot{e}| \le K_2$. Então, pode ser verificado que $a_1(\eta_0) < \lambda_1 + \mu_1\lambda_0 + \mu_1\mu_0$ e que $|b_1(\eta_0)| \le \lambda_1 + \mu_1\lambda_0 + K_2$. Um novo vetor de estados $\eta = [\eta_0\ \eta_1]^T$ é definido e o sistema é escrito na forma matricial:

$$\dot{\eta} = A(\eta)\eta + b(\eta) \tag{35}$$

Onde:

$$A(\eta) = \begin{bmatrix} -a_0(\eta_0) & 1 \\ -a_1(\eta_0) & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\eta) = \begin{bmatrix} -b_0(\eta_0) \\ -b_1(\eta_0) \end{bmatrix} \tag{36}$$

Note que $|A(\eta)| < c_1$ e $|b(\eta)| < c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes positivas. Considerando agora a função de Lyapunov $V(\eta) = \eta^T\eta$. Derivando V no tempo, tem-se $\dot{V}(\eta) = 2\eta^T A(\eta)\eta + 2\eta^T b(\eta)$. Então obtém-se $\dot{V} \le 2c_1|\eta|^2 + 2c_2|\eta|$ que é da forma $\dot{V} \le 2c_1 V + 2c_2\sqrt{V}$. Considerando a equação de comparação $\dot{V}_c = 2c_1 V + 2c_2\sqrt{V}$, se $V_c(t_0) = V(t_0)$, então $V(t) \le V_c(t)$, $\forall t \ge t_0$. Utilzando $\varphi^2 = V_c$, pode-se mostrar que $V(t) \le e^{c_3 t}(c_4 V(t_0) + c_5) + c_6$ onde c_3, c_4, c_5, c_6 são constantes positivas. Assim, $V(t)$ não escapa em tempo finito para nenhum K_2 e assim η pertence a $L_{\infty e}$. Além disso, uma vez que $\left|e^{(i)}(t)\right| \le K_i, \forall t,\ i = 0, \ldots, p_j$, então conclui-se que ζ não diverge em tempo finito.

Referências

Dávila, A., Moreno, J. and Fridman, L. (2010). Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design, *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD.

Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control : Theory and Applications*, Systems and Control Book Series, Taylor & Francis.

Fridman, L. and Levant, A. (2002). Higher order sliding modes, *in* Perruquetti and B. J. P. (eds), *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker, New York, pp. 53–101.

Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.* **58**(6): 1247–1263.

Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique, *Automatica* **34**(3): 379–384.

Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *Int. J. Contr.* **76**(9): 924–941.

Levant, A. (2009). Non-homogeneous finite-time-convergent differentiator, *IEEE Conference on Decision and Control CDC'09*, Shanghai, P.R. China.

Moreno, J. A. and Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers, *IEEE Conference on Decision and Control CDC'08*, pp. 2856–2861.

Nunes, E. V. L., Hsu, L. and Lizarralde, F. (2009). Global exact tracking for uncertain systems using output-feedback sliding mode control, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **54**: 1141–1147.

Nunes, E. V. L., Peixoto, A. J., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2013). Global exact tracking for uncertain mimo linear systems by output feedback sliding mode control, *Journal of the Franklin Institute* . http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2013.01.020.