

DECONVOLUÇÃO DE SINAIS

MAXWELL D. B. DE MELO¹, GEORGE L. R. DE BRITO², PATRICK L. MOREIRA², ADSON F. DA ROCHA³.

1. *Coordenação de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Tocantins*
Quadra ALC NO 14 (109 Norte), Av. NS 15, s/n, LABRAM, Bloco III, sala 6, Caixa Postal 114, Palmas-TO, CEP:
77001-090

2. *Coordenação de Ciência da Computação, Universidade Federal do Tocantins*
Quadra ALC NO 14 (109 Norte), Av. NS 15, s/n, LABRAM, Bloco III, sala 6, Caixa Postal 114, Palmas-TO, CEP:
77001-090

3. *Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade de Brasília*
Faculdade UnB Gama, Área Especial 02 Lote 14 Setor Central Gama - DF

E-mails: maxwellmelo@uft.edu.br, gbrito@uft.edu.br, letouze@uft.edu.br, adson@unb.br

Abstract – This paper presents results which allowed an estimate of the optimal response of a sensor of a Swan-Ganz catheter. The deconvolution method is based on obtaining an input signal LTI system from knowledge of its output and the impulse response. The noise acts degrading the recovered signal, and this phenomenon is also discussed. Tests led to reasonable results, with average error of 8.9%. The results suggest that the method may be useful in applications of linear systems.

Keywords – Signs, linear systems, convolution signal, deconvolution signal.

Resumo – Este trabalho apresenta resultados que permitiram uma estimativa da resposta ideal de um sensor de um cateter Swan-Ganz. A deconvolução é um método baseado na obtenção do sinal de entrada de um sistema Linear e Invariante no Tempo (LTI) a partir do conhecimento de sua saída e da resposta ao impulso. O ruído atua degradando o sinal recuperado, e esse fenômeno é também discutido. Testes levaram a resultados razoáveis, com erro médio de 8,9%. Os resultados levam a crer que o método pode ser útil em aplicações com sistemas lineares.

Palavras-chave - Sinais, sistemas lineares, convolução de sinais, deconvolução de sinais.

1. INTRODUÇÃO

A saída de um sistema linear e invariante no tempo pode ser representada como uma convolução de um sinal de entrada, com a resposta ao impulso do sistema, conforme mostrado na Equação (1) no domínio do tempo, o asterisco significa uma operação de convolução neste caso.

$$T_{medido}(t) = h(t) * T_{real}(t) \quad (1)$$

Aqui, $T_{medido}(t)$ ($^{\circ}\text{C}$) é o sinal de temperatura no domínio do tempo, $h(t)$ é a resposta ao impulso do cateter e $T_{real}(t)$ é a temperatura sendo medida. No domínio da frequência, a Equação (1) torna-se uma multiplicação ponto a ponto, como ilustrado na Equação (2).

$$T_{medido}(j\omega) = H(j\omega) \cdot T_{real}(j\omega) \quad (2)$$

Na equação acima, $T_{medido}(j\omega)$ ($^{\circ}\text{C}$) é a Transformada de Fourier Rápida (FFT--*Fast Fourier Transform*) do sinal de temperatura, $H(j\omega)$ é a FFT da resposta ao impulso do cateter, e $T_{real}(j\omega)$ é a FFT da temperatura sendo medida. A deconvolução então pode ser obtida, tendo-se a FFT da resposta ao impulso do sistema,

que neste caso é um sensor de um cateter, e a FFT do sinal medido, que é o sinal de termodiluição obtido do cateter. A divisão ponto a ponto da FFT do sinal medido pela FFT da resposta ao impulso do sistema, é a deconvolução proposta neste artigo. A deconvolução pode ser aplicada em variados tipos de sistemas físicos, desde que o sistema seja LTI.

As Equações (1) e (2) indicam que a temperatura medida pelo sensor na verdade corresponde à convolução entre a temperatura real e a resposta ao impulso do sensor. Na maioria dos casos, esse sinal é uma versão filtrada da temperatura verdadeira, pois o sensor apresenta característica de um filtro passa-baixas.

A situação problema pode ser melhor compreendida na Figura 1. Na Figura 1, mostra-se que a resposta obtida é a resposta emanada de uma convolução na frequência, multiplicada ponto a ponto, por uma resposta inversa de um filtro digital dos tipos FIR (*Finite Impulse Response*) ou IIR (*Infinite Impulse Response*).

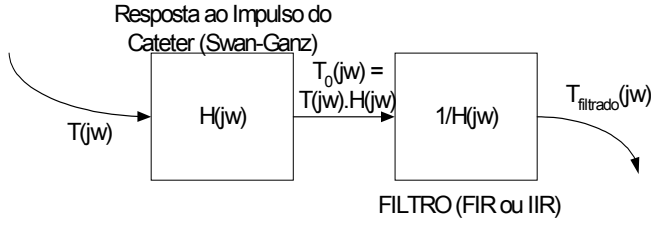


Figura 1. Diagrama de blocos ilustrativo do problema da deconvolução. $H(j\omega)$ é a TF da resposta ao impulso do sensor, $T(j\omega)$ é a TF da temperatura verdadeira e $T_0(j\omega)$ é o módulo da TF da temperatura medida. O sinal medido é filtrado por um filtro com a resposta em frequência equivalente a $1/H(j\omega)$, e o resultado, $T_{filtrado}(j\omega)$ é uma estimativa para o sinal real.

Para uma discussão mais refinada sobre a melhoria da performance da resposta do cateter usando técnicas de processamento digital de sinais, sugere-se a leitura das seguintes referências bibliográficas: [da Rocha, 1997, Kunugi *et al.*, 1958, Bickle, 1971(a), 1971(b), Heitor, 1985, Dantzig, 1985, Hori *et al.*, 1994]. A seguir são discutidos conceitos básicos relativos à operação de deconvolução.

2. DECONVOLUÇÃO

Para sistemas discretos que são lineares e invariantes no tempo, a expressão da convolução pode ser dada pela seguinte equação.

$$y[n]_n = \sum_{m=0}^{N-1} h[n-m]x[m] \quad (3)$$

Onde $x[n]$ é o sinal discreto de entrada de um sistema, $h[n]$ é a resposta discreta no tempo ao impulso desse sistema, e $y[n]$ é o sinal de saída discreto no tempo. A Equação (3) pode ser re-escrita de forma mais sintética como

$$y_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_{n-m}x_m, \quad (4)$$

onde x_n é o sinal discreto de entrada de um sistema, h_n é a resposta discreta no tempo ao impulso desse sistema, e y_n é o sinal de saída discreto no tempo.

O problema da Equação (4) pode ser descrito por meio de uma relação matricial, que é indicado de forma mais sintética, pela Equação (5).

$$[y] = [h][x] \quad (5)$$

Em que $[y]$ é o vetor de saída do sistema, $[h]$ é a matriz de Toeplitz representando a convolução discreta e $[x]$ é o vetor discreto de entrada. Neste caso, $M=N$, e expandindo a Equação (5) chega-se à matriz circulante, mostrada na Equação (6), que é um caso especial da matriz de Toeplitz.

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-4} \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{M-7} & h_{M-8} & h_{M-9} & h_{M-10} & \dots & \dots & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{M-3} & h_{M-4} & h_{M-5} & h_{M-6} & \dots & \dots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{M-2} & h_{M-3} & h_{M-4} & h_{M-5} & \dots & \dots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{M-1} & h_{M-2} & h_{M-3} & h_{M-4} & \dots & \dots & 0 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-4} \\ x_{N-3} \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Na relação matricial acima, $[y_0 \dots y_{N-1}]$ é o vetor de saída do sistema, $[h]_{M \times N}$ é uma matriz de Toeplitz, e $[x_0 \dots x_{N-1}]$ é o vetor discreto de entrada. O problema da deconvolução pode ser encarado como a solução inversa do sistema linear proposto pela Equação (6). Assim, para realizar a deconvolução pode-se adotar a metodologia de obter-se o vetor x_n tal que:

$$[x] = [h]^{-1}[y] \quad (7)$$

Note-se que $[y]$ é o vetor de saída do sistema, $[h]^{-1}$ é a matriz de Toeplitz inversa, e $[x]$ é o vetor discreto de entrada.

A matriz da DFT (*Discrete Fourier Transform*) é mostrada na Equação (8),

$$[W] = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \dots & W^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Multiplicando-se ambos os lados da Equação (5) pela matriz de Fourier, obtém-se a Equação (9).

$$\begin{aligned} [W][y] &= [W][h][x] \\ [W][y] &= [W][h][W]^{-1}[W][x] \Leftrightarrow [Y] = [H][X] \end{aligned} \quad (9)$$

A matriz W^{-1} é a matriz complexa conjugada da matriz W . Não é difícil mostrar que $[W].[h].[W]^{-1}$ é uma matriz diagonal. Assim, no plano da frequência teremos que resolver a equação (10),

$$X = [H]^r.[Y], \quad (10)$$

onde $[H]^r$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os recíprocos da matriz $[H]$. É importante notar que uma vantagem de se usar a DFT, é fugir de uma inversão de matriz que muitas vezes é lenta no domínio do tempo, para uma operação mais eficiente, pois pode-se usar a FFT dos sinais temporais obtidos, tanto da resposta ao impulso, quanto da saída do sistema, otimizando-se desta forma, o

algoritmo proposto, haja visto que evita-se desta forma, uma inversão de matriz no domínio do tempo.

3. DECONVOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

O sistema proposto neste trabalho pode ser modelado por um sensor de temperatura baseado em termopar em um meio convectivo, e a resposta ao impulso do mesmo, pode ser caracterizada como uma soma de exponenciais. Portanto, para um efeito de analogia e de reprodução de resultados, suponha a função $h(n)$ a seguir:

$$h[n] = 2e^{-3n}, \quad (11)$$

O gráfico correspondente a $h[n]$ é mostrado na Figura 2. O intervalo de tempo em questão é 10 s e o período de amostragem é 0.1 s (frequência de amostragem de 10 Hz).

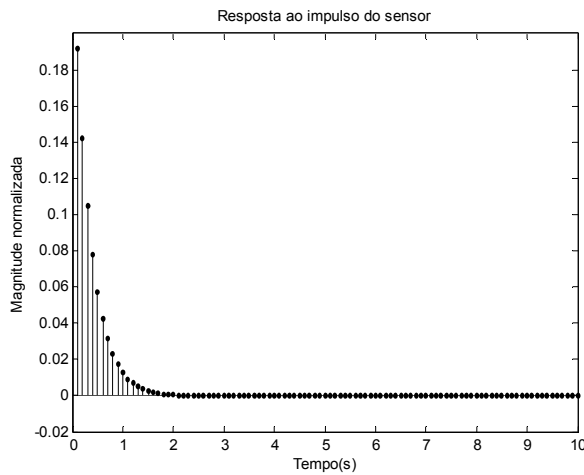


Figura 2. Para o sistema em análise nesta seção supomos uma resposta ao impulso exponencial.

Continuando no campo das suposições, imagine-se um degrau unitário deslocado ($u(n-50)$), e este é ilustrado na Figura 3. A convolução dos sinais discretos das Figuras 2 e 3 é mostrada na curva superior da Figura 4. Aplicando a matemática exposta anteriormente, e usando-se a matriz de Toeplitz, obtém-se a curva mostrada na parte inferior da Figura 4, que é precisa, reproduzindo fielmente a curva da entrada do sistema exposto inicialmente na Figura 3.

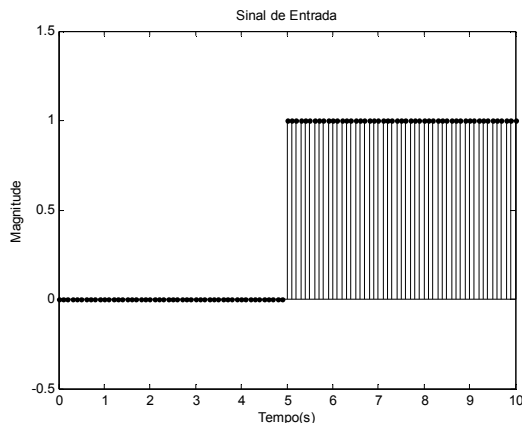


Figura 3. Entrada para o sistema em análise. Um degrau unitário.

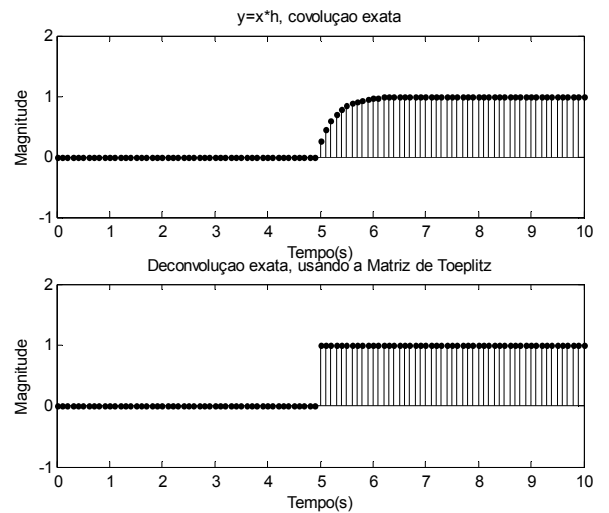


Figura 4. Convolução (curva superior) e deconvolução (curva inferior) para o sistema em análise. A convolução ($y[n]=h[n]*x[n]$) para o sistema em discussão é mostrada na curva superior, e a deconvolução é mostrada na parte inferior da curva. Notar que se não há ruído a deconvolução é exata.

Um ruído gaussiano é adicionado à saída $y[n]$, como ilustrado na parte superior da Figura 5, a seguir. O ruído possui média zero, desvio padrão zero, com valores variando entre 0 e 0.01 e gaussiano [Melo, 2007].

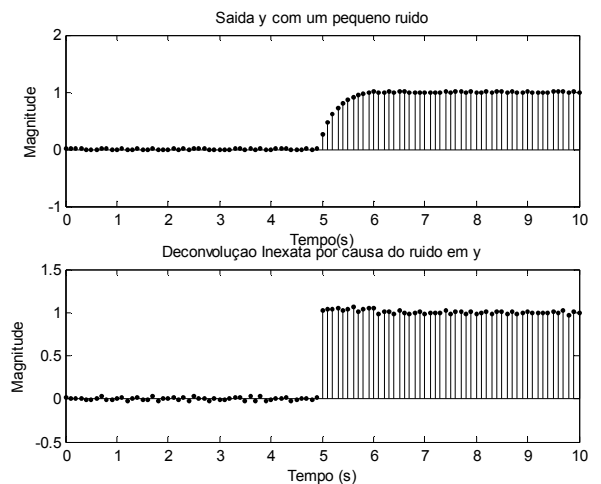


Figura 5. Saída do sistema com um pequeno ruído (curva acima) e deconvolução inexata (curva abaixo) devido ao ruído. A saída do sistema, ilustrada na curva superior, possui agora um pequeno ruído superposto. Notar o efeito deste pequeno ruído na deconvolução ilustrada no gráfico inferior desta figura.

Vê-se claramente que um pequeno ruído pode distorcer e muito o sinal deconvolvido.

4. DECONVOLUÇÃO DE SINAIS

A seguir, na Figura 6, é mostrado um exemplo de deconvolução de um sinal obtido com um sensor com três exponenciais, tal como mostrado na Equação (11) [da Rocha, 1997].

$$h(t) = K(e^{-at} + B.e^{-bt} + C.e^{-ct}) \quad (11)$$

Onde $h(t)$ a resposta ao impulso, a , B , b , C , c são parâmetros obtidos na caracterização do cateter, e K é uma constante que é definida de forma que a área sob $h(t)$ seja igual a 1, ou seja:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c}} \quad (12)$$

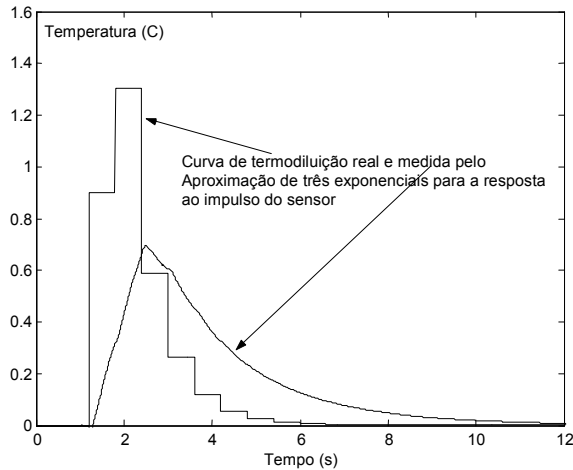


Figura 6. Curvas de temperatura real e medida pelo sensor, para um indicador injetado no ventrículo direito.

Na Figura 7, são mostrados sinais deconvoluídos para quatro frequências de corte do filtro passa baixa. Nota-se que uma frequência de corte de 5 Hz, neste caso é a melhor.

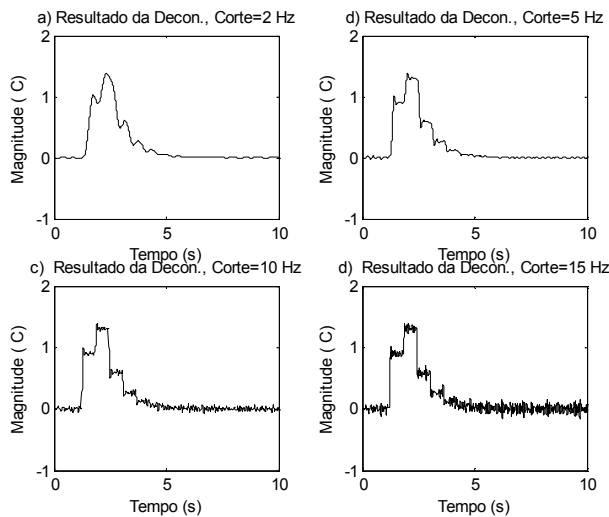


Figura 11. Sinal ideal deconvoluído com a ajuda de um filtro passa-baixas digital de Butterworth com frequências de corte de 2Hz, 5Hz, 10Hz, e 15 Hz. Notar que frequências de corte maiores tornam o sinal deconvoluído mais ruidoso. Caso a frequência de corte tenha uma magnitude muito baixa o sinal perde informação, ficando mais distorcido, como mostrado na Figura 11.a.

Um atraso imposto pela resposta do filtro pode ser apreciado na Figura 12 para uma frequência de corte de 5 Hz.

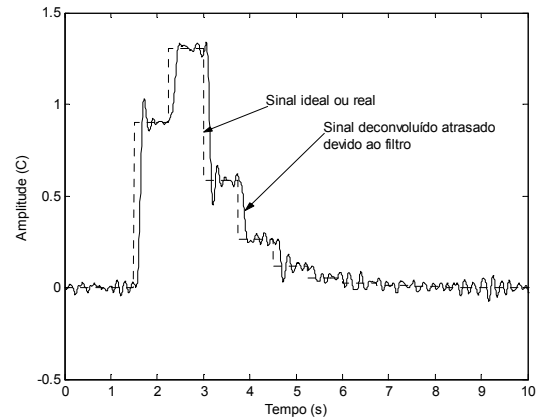


Figura 12. Atraso do sinal deconvoluído, para uma frequência de corte de 5 Hz, devido ao filtro digital. O filtro, como qualquer sistema físico, causa um atraso na resposta do sistema. Com a deconvolução temos o mesmo problema, que é resolvido simplesmente deslocando o sinal por uma quantidade aproximada de amostras.

A escolha do filtro imposta neste artigo pode não ter sido a ideal, e diversos parâmetros podem ser definidos para impor uma resposta mais exata. A otimização depende da definição de uma função erro. Uma extensa discussão sobre essas otimizações podem ser encontrada em Riad [1986] e da Rocha *et al.* [2005]. Em cada simulação adquiriu-se os sinais do sensor do cateter e de um sensor rápido. Esses sinais, originalmente amostrados a 300 Hz, foram re-amostrados a uma frequência de 60 Hz, para compatibilizar o sinal com o algoritmo desenvolvido.

Todos os sinais foram processados, e a maioria convergiram de forma satisfatória. Na Figura 13, mostra-se um resultado típico de simulação comparado com uma amostra real da curva de deconvolução – curva tracejada.

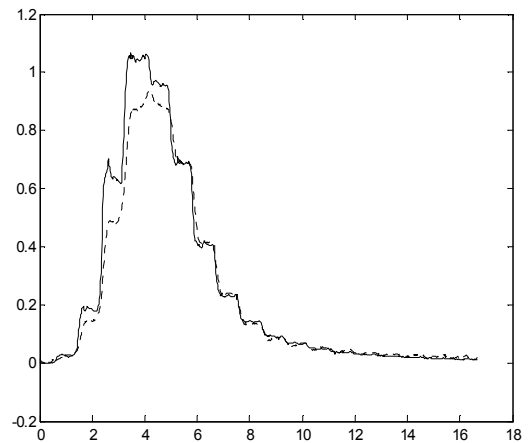


Figura 13. Exemplo de resultado de deconvolução de um sinal de termodiluição. O sinal capturado com o sensor rápido, é mostrado na linha tracejada, e o sinal deconvoluído é uma linha contínua. Nesse sinal, em particular, o erro apresentado foi de 3,3%. A fração de ejeção medida com o sensor rápido é de 0,44, e a fração de ejeção obtida por deconvolução é de 0,47 (Melo, 2007).

5. CONCLUSÕES

O principal resultado do presente trabalho foi a proposta para as bases de um novo algoritmo de deconvolução de curvas de termodiluição. O novo método apresenta um princípio diferente, atuando no domínio do tempo. As simulações computacionais mostraram um excelente desempenho para frequências cardíacas inferiores a 180 batimentos por minuto e frações de ejeção menores que 0,8. Testes com sinais reais, obtidos de simulador mecânico para o sistema cardiovascular, levaram a resultados razoavelmente bons, com um erro médio de 8,9%. Com relação à velocidade da simulação, os algoritmos foram comparados em uma máquina com processador *Intel Inside Pentium 4*, com 700 MB de memória principal, e 3 GHz de clock interno, uma configuração de ponta para o ano de 2007. Para algoritmos predecessores obteve-se um tempo de simulação de pouco mais de 30 minutos, e para o algoritmo de dos Santos [2000], o tempo foi melhor, variando de 3 a 8 minutos, porém dependia fortemente dos valores iniciais para as simulações. O tempo de convergência máximo para o algoritmo proposto neste trabalho foi de 9s para o pior caso. É possível que, com maior desenvolvimento e com testes mais abrangentes, o método possa vir a ter aplicações clínicas.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem as seguintes instituições pelo apoio na realização desse trabalho: a UFT, a UnB, ao CNPq, a FUNCAP e a FAPTO.

7. REFERÊNCIAS

Bickle, L. W., (1971). "A time domain deconvolution technique for the correction of transient measurements," Report SC-RR-71 06658, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, Exploratory Measurements Division 1442, November.

da Rocha, A. F.; dos Santos, I.; Nascimento, F. A. O. & de Melo, M. D. B. (2005). Dieter Haemmerich and Jonathan W Valvano, "Effects of the time response of the temperature sensor on thermodilution measurements", *Physiol. Meas.* 26.

da Rocha, A. F. (1997). "The Dynamic Behavior of Thermistor Probes", Dissertation for degree of Doctor of Philosophy, University of Texas, Austin, May.

Dantzig, J. A. (1985). "Improved transient response of thermocouple sensors," *Rev. Sci. Instrum.*, v. 56, no. 5, pp. 723-725.

dos Santos, Í. (2000). Proposta de um método para medição da fração de ejeção do ventrículo direito, Dissertação (Mestrado em Engenharia Biomédica), Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília.

Hori, J.; Saitoh, Y. & Kiryu, T. (1994). "Improvement of the time-domain response of a thermodilution sensor by the natural observation system," *IEICE Trans. Fundamentals*, v. E77-A, n. 5, may.

de Melo, M. D. B. (2007). Algoritmo para Recuperação de Sinais de Temperatura de Cateteres de Artéria Pulmonar. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica (ENE), Universidade de Brasília.