

PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO PARA UM SISTEMA 2D BALL BALANCER

WALLYSONN ALVES DE SOUZA*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA†, DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA†, ANDRÉ RÊGO VIEIRA†, EDVALDO ASSUNÇÃO†, JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO†, EMERSON R. P. DA SILVA‡

*IFG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Departamento das Áreas Acadêmicas de Jataí - Campus Jataí
Rua Riachuelo, 2090, 75804-020, Jataí, Goiás, Brasil

†UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

‡UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, PR, Brasil

Emails: wallysonn@yahoo.com.br, marcelo@dee.feis.unesp.br,
diogo_oliveira6@hotmail.com, andreregovieira@gmail.com, edvaldo@dee.feis.unesp.br,
jean@dee.feis.unesp.br, e.ravazzi@bol.com.br

Abstract— The paper presents the design and practical implementation of a recently proposed switched control design method for some classes of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. This method uses a quadratic Lyapunov function to design the feedback controller gains based on Linear Matrix Inequalities (LMIs). The controller gain is chosen by a switching law that returns the smallest value of the time derivative of the Lyapunov function. The methodology offers less conservative alternative than the well-known controller for uncertain systems with only one state feedback gain. The control design subject to failures and practical implementation of a 2D ball balancer system confirms the efficiency of the method.

Keywords— Switched control, Linear systems, Polytopic uncertainties, LMIs, Failure.

Resumo— O trabalho apresenta o projeto e implementação prática de um método de controle chaveado recentemente proposto para algumas classes de sistemas lineares invariantes no tempo com incertezas politópicas. Este método é baseado em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e utiliza uma função de Lyapunov quadrática para projetar os ganhos de realimentação do controlador. O controle proposto escolhe um ganho, em um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento que retorna menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática. A metodologia proposta oferece uma alternativa menos conservativa do que o controle clássico que utiliza apenas um ganho de realimentação. O projeto do sistema de controle sujeito a falhas e a implementação prática de um sistema 2D ball balancer confirmam a eficiência do método.

Palavras-chave— Controle chaveado, Sistemas lineares, Incertezas politópicas, LMIs, Falha.

1 Introdução

Nos últimos anos tem crescido muito o interesse em estudar sistemas chaveado, e esse crescimento é devido ao surgimento de uma grande quantidade de problemas de caráter prático e acadêmico, iniciando principalmente com (Wicks et al., 1994; Liberzon and Morse, 1999; Decarlo et al., 2000; Hespanha and Morse, 2002). Como afirma (Sun and Ge, 2005), para sistemas lineares invariantes no tempo, a resposta transitória pode ser melhorada por meio de controladores chaveados, como pode ser visto, por exemplo, em (Feuer et al., 1997; McClamroch and Kolmanovskiy, 2000; Ishii and Francis, 2002; Leith et al., 2003).

Em geral, a maioria dos trabalhos sobre sistemas lineares chaveados utilizam múltiplas funções de Lyapunov (Petterson, 2004; Geromel and Colaneri, 2006; Lin and Antsaklis, 2009; Geromel and Deaecto, 2009; Otsuka and Soga, 2010; Deaecto et al., 2011) mas, embora em menor número, existem trabalhos sobre sistemas lineares chaveados que utilizam uma única função de Lyapunov como em (Xie and Yu, 2006; Zhai et al., 2003; Souza

et al., 2013). Em (Souza et al., 2013) foi proposto uma nova metodologia de projeto de controle chaveado para algumas classes de sistemas lineares com incertezas politópicas. Tal método utiliza uma única função de Lyapunov e a estabilidade quadrática para projetar vários ganhos do controlador baseado em LMIs. Este controlador é composto por um único ganho que é escolhido por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada da função de Lyapunov. A metodologia proposta apresenta várias vantagens, pois muitas vezes apresenta um melhor desempenho, se comparado com o controlador não chaveados normalmente implementado (Boyd et al., 1994), pois as LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são mais relaxadas e, embora os ganhos sejam projetados para serem usados como uma combinação convexa, na prática não há a necessidade de realizar tal combinação.

Este trabalho tem o objetivo de confirmar o bom desempenho da metodologia proposta em (Souza et al., 2013). Assim, foi realizada uma implementação prática no controle de um sistema 2D ball balancer, considerando falhas na

leitura do ângulo θ , e conseqüentemente em $\dot{\theta}$. Foi feita uma comparação, de desempenho, com uma lei de controle clássica sem chaveamento (Boyd et al., 1994). As simulações computacionais foram realizados utilizando a linguagem do YALMIP (Lofberg, 2004), com o *solver* SeDuMi (Sturm, 1999).

Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas no trabalho:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}; \quad x(t) = x; \\ V(x) &= V; \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \\ (A, B, C, K)(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, B_i, C_i, K_i), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $r = 2^s$ e s é o número de parâmetros incertos na planta.

2 Sistema Linear com Incertezas Politópicas: Estabilidade e Taxa de Decaimento

Considere o sistema linear com incertezas politópicas,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \quad (2)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ como em (1), com $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Admitindo que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para a realimentação, uma lei de controle amplamente utilizada na literatura é dada por (Boyd et al., 1994):

$$u(t) = -Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), obtém-se o sistema realimentado

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i - B_i K)x(t). \quad (4)$$

Agora, define-se a lei de controle com realimentação do vetor de estado:

$$u(t) = u_\alpha(t) = -\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i x(t) = -K(\alpha)x(t), \quad (5)$$

sendo $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Considerando (1) e substituindo (5) em (2), obtém-se o sistema realimentado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K(\alpha)x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j (A_i - B_i K_j)x(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Em um projeto de controle é importante assegurar estabilidade e outros usuais índices de desempenhos para o sistema controlado, tais como tempo de estabelecimento (relacionado com a taxa de decaimento), restrições na entrada e saída do

signal de controle. A metodologia proposta permite especificar estes índices de desempenho, sem a necessidade de alterar as LMIs existente na literatura. Assim, neste trabalho será considerada taxa de decaimento (Boyd et al., 1994). Neste contexto, seguem os seguintes Teoremas.

Teorema 1 ((Boyd et al., 1994)) *O sistema linear com incertezas politópicas dado em (4) é quadraticamente estabilizável com taxa de decaimento maior ou igual $\beta > 0$ se, e somente se, existe uma matriz simétrica positiva definida X e $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$,*

$$XA_i^T + A_i X - B_i M - M^T B_i^T + 2\beta X \prec 0. \quad (7)$$

Se (7) são factíveis, o ganho do controlador é dado por $K = MX^{-1}$.

Teorema 2 *Se $B_i = B$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema linear com incertezas politópicas dado em (6) é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual β , se existirem uma matriz simétrica positiva definida X e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in \mathbb{K}_r$,*

$$XA_i^T + A_i X - B M_i - M_i^T B^T + 2\beta X \prec 0. \quad (8)$$

Se (8) são factíveis, os ganhos do controlador são dados por $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$.

Prova: Pode ser vista, por exemplo, em (Souza et al., 2013). \square

3 Resultados Principais

Nesta seção é apresentado o projeto de um controlador chaveado para o sistema linear com incertezas politópicas (2), proposto em (Souza et al., 2013).

3.1 Caso 1: Sistema Linear com uma Matriz Constante $B(\alpha) = B$

Nesta seção, o projeto de um controlador chaveado para o sistema linear incerto (2) considera que $B(\alpha) = B$ é uma matriz constante, isto é,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bu(t). \quad (9)$$

Suponha que as LMIs dadas em (8) sejam factíveis para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e sejam $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, os ganhos do controlador dado em (5), e $P = X^{-1}$ obtido das condições do Teorema 2. Então, define-se o controlador chaveado

$$u(t) = u_\sigma = -K_\sigma x, \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-x^T P B K_i x\}. \quad (10)$$

Portanto, de (1), o sistema controlado (9) e (10) é dado por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i - B K_\sigma)x(t). \quad (11)$$

Teorema 3 ((Souza et al., 2013)) Admita que as condições do Teorema 2, relativa ao sistema (9) com a lei de controle (5), sejam satisfeitas e obtenha $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, e $P = X^{-1}$. Então, a lei de controle chaveada (10) torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (9), globalmente assintoticamente estável.

Prova: Considere uma candidata a função de Lyapunov $V = x^T P x$. Defina \dot{V}_{u_α} e \dot{V}_{u_σ} a derivada temporal de V para o sistema (9), com as leis de controle (5) e (10), respectivamente. Então, de (9) e (10),

$$\begin{aligned}\dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T P \dot{x} = 2x^T P (A(\alpha)x + B u_\sigma) \\ &= 2x^T P A(\alpha)x + 2x^T P B (-K_\sigma)x.\end{aligned}\quad (12)$$

De (1), $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$. Assim, notando que

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T P B (-K_i)x\} \leq x^T P B \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) x,$$

e de (12), da lei de controle chaveada dada em (10) e de (5), observa-se que

$$\begin{aligned}\dot{V}_{u_\sigma} &= 2x^T P A(\alpha)x + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T P B (-K_i)x\} \\ &\leq 2x^T P A(\alpha)x + 2x^T P B \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) x \\ &= 2x^T P (A(\alpha) - B K(\alpha)) x \\ &= 2x^T P (A(\alpha)x + B u_\alpha) = \dot{V}_{u_\alpha}.\end{aligned}$$

Portanto, $\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) \leq \dot{V}_{u_\alpha}(x(t)) < 0$. \square

Observação 1 O Teorema 3 mostra que, se as condições do Teorema 2 forem satisfeitas, então $\dot{V}_{u_\alpha}(x(t)) < 0$ para todo $x(t) \neq 0$ e portanto $\dot{V}_{u_\sigma}(x(t)) < 0$ para $x(t) \neq 0$, assegurando que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado (9) e (10) seja globalmente assintoticamente estável. Assim, o Teorema 2 pode ser utilizado para projetar os ganhos K_1, K_2, \dots, K_r e a matriz $P = X^{-1}$ da lei de controle chaveada (10). Adicionalmente, observa-se que a lei de controle chaveada (10) não utiliza as variáveis incertas α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, que são necessárias para a implementação da lei de controle (5). Além disso, ela também oferece uma alternativa menos conservadora do que a lei de controle clássica (3), que utiliza apenas um ganho K no controlador. Mais detalhes podem ser encontrados em (Souza et al., 2013).

3.2 Caso 2: Sistema Linear com uma Matriz Incerta $B(\alpha)$

Neste caso, será considerado o sistema linear com incertezas politópicas dado em (2), com α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, definido em (1), ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \hat{A}(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{A}_i, \quad \hat{B}(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \hat{B}_i.\end{aligned}\quad (13)$$

Seja $v(t) \in \mathbb{R}^m$ a derivada temporal do vetor de entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Defina $x_{n+l}(t)$ e $v_l(t)$, tais que $\dot{x}_{n+l}(t) = \dot{u}_l(t) = v_l(t)$, $l \in \mathbb{K}_m$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = v_1(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m}(t) = v_m(t), \end{cases}\quad (14)$$

ou equivalentemente (Barmish, 1983),

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + Bv(t),\quad (15)$$

sendo

$$x = [\hat{x}^T \ x_{n+1} \ \dots \ x_{n+m}]^T,$$

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha) & \hat{B}(\alpha) \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}.$$

Das considerações acima, nota-se que o sistema (15) é equivalente ao sistema (9) e portanto o problema cai no Caso 1. Assim, pode-se adotar o procedimento estabelecido no Caso 1 para projetar uma lei de controle chaveada $v(t) = -K_\sigma x(t)$, $K_\sigma \in \mathbb{R}^{n+m}$.

4 O Sistema 2D ball balancer Quanser[®]

Considere o sistema 2D ball balancer, fabricado pela Quanser[®], mostrado na Figura 1. Seu modelo esquemático da direção x da placa é mostrado na Figura 2, e na direção y pode ser representado da mesma forma (Quanser, 2008).



Figura 1: 2D ball balancer.

O sistema consiste de uma placa quadrada sobre a qual uma bola é colocada e se move livremente. A bola pode ser posicionada em um ponto de referência fixo ou pode rastrear uma rota determinada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola. Existem dois servomotores, cada um deles está ligado a um dos eixos da placa. Ao controlar a posição das engrenagens de carga do servomotor, o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola em uma posição plana desejada.

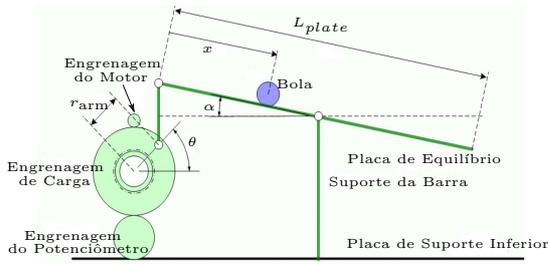


Figura 2: Planta esquemática do 2D ball balancer na direção x .

O modelo matemático do sistema 2D ball balancer (Quanser, 2008) é dado por:

$$\ddot{x}(t) = K_{bb}\theta(t), \quad \tau\ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = KV_m(t), \quad (16)$$

sendo:

$x(t)$ a posição da bola;

$\theta(t)$ o ângulo de carga;

$V_m(t) = u(t)$ o sinal de controle;

τ e K são parâmetros do fabricante;

$$e K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)}.$$

A descrição e os valores das constantes são dados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do sistema 2D ball balancer.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (Kg)	m_b	0,003
Distância do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	r_{arm}	2,54
Raio da bola (cm)	r_b	1,96
Comprimento da mesa (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do fabricante (rad/sV)	K	1,76
Parâmetro do fabricante (s)	τ	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (Kgm ²)	J_b	0,0046
Parâmetro do sistema (m/s ² rad)	K_{bb}	1,3

O sistema (16) pode ser escrito no espaço de estados, como segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix} u. \quad (17)$$

O objetivo deste trabalho é mostrar a eficiência da metodologia proposta, e isso será feito por meio do projeto e implementação prática de um sistema de controle para 2D ball balancer que serão abordados a seguir.

Para a simulação e implementação prática foi inserida uma falha na leitura do ângulo medido, e assim, no projeto de controle foi considerado que esta falha pode chegar a 50% e pode ser considerada como sendo uma incerteza do tipo politópica. Portanto, para o projeto do controlador foram utilizados os seguintes vértices do politopo,

para ambos os eixos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35,0877 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -17,5439 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 61,7544]^T.$$

Considerando os vértices do politopo (18) e uma taxa de decaimento $\beta = 1,4$ foram obtidos os seguintes ganhos e a seguinte matriz simétrica positiva definida:

$$K_1 = [51.4698 \ 43.3732 \ 10.2229 \ 0.1141]$$

$$K_2 = [23.8435 \ 19.8702 \ 4.6307 \ 0.0358]$$

$$P=10^3 \begin{bmatrix} 6.9554 & 5.4244 & 1.1401 & 0.0679 \\ 5.4244 & 4.3804 & 0.9382 & 0.0567 \\ 1.1401 & 0.9382 & 0.2092 & 0.0130 \\ 0.0679 & 0.0567 & 0.0130 & 0.0009 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$K=[169.1410 \ 144.6467 \ 32.7815 \ 1.4205]$$

$$P=10^5 \begin{bmatrix} 4.0841 & 3.3482 & 0.7154 & 0.0342 \\ 3.3482 & 2.8149 & 0.6105 & 0.0295 \\ 0.7154 & 0.6105 & 0.1365 & 0.0068 \\ 0.0342 & 0.0295 & 0.0068 & 0.0004 \end{bmatrix} \quad (20)$$

com o método proposto (Teorema 2) e o método clássico (Teorema 1), respectivamente.

Para a simulação e a implementação prática apenas as variáveis de estado x e θ estão disponíveis, e \dot{x} e $\dot{\theta}$ são estimadas por meio de filtros derivativos $G_f(s) = 20s/(s+20)$. O objetivo do controle é fazer com que a bolinha siga uma trajetória pré definida, que neste trabalho foi considerada como sendo um quadrado de 10 cm de lado.

4.1 Simulações

O objetivo da simulação numérica é fazer com que a bolinha siga a referência de um quadrado de 10 cm de lado. Embora os ganhos tenham sido projetados para suportar uma falha de 50%, com 20 segundos do início da simulação foi inserida uma falha de 30% apenas na leitura do ângulo do motor da direção y da placa e foi considerada a condição inicial $[0 \ 0 \ 0 \ 0]$. As respostas obtidas são apresentadas nas Figuras 3 e 4, utilizando os controladores (10) e (3), respectivamente. Não apresentamos a simulação da posição x , pois não foi inserida falha neste eixo.

As simulações mostraram bons resultados, mas não evidenciaram os benefícios da metodologia proposta. Das Figuras 3 e 4, pode-se notar que os controladores apresentaram um bom desempenho na atenuação dos efeitos da falha de 30%, na leitura do ângulo θ , na direção y da placa.

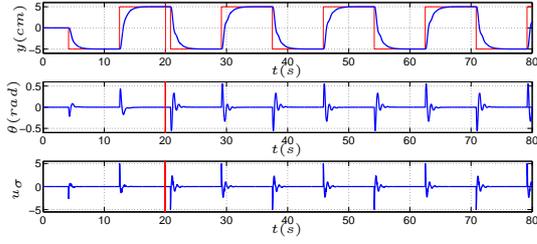


Figura 3: Simulação numérica da direção y : posição y , ângulo θ e sinal de controle u_σ do $2D$ ball balancer (17) utilizando o controlador chaveado (10).

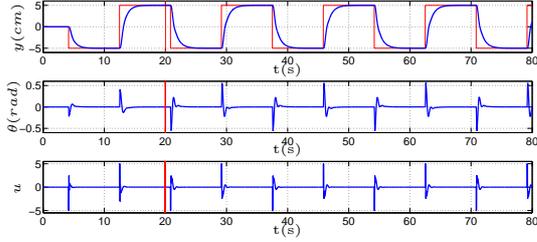


Figura 4: Simulação numérica da direção y : posição y , ângulo θ e sinal de controle u do $2D$ ball balancer (17) utilizando o controlador clássico (3).

4.2 Resultados Práticos

Os resultados práticos foram colhidos considerando as mesmas condições das simulações numérica e foram obtidas as respostas apresentadas nas Figuras 5 a 9.

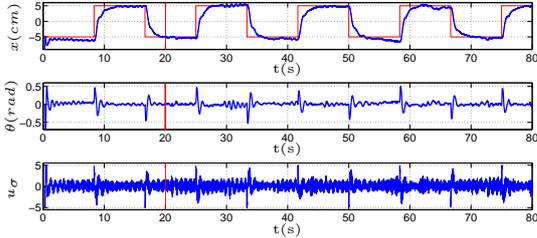


Figura 5: Resultados práticos da direção x : posição x , ângulo θ e sinal de controle u_σ do $2D$ ball balancer (17) utilizando o controlador chaveado (10).

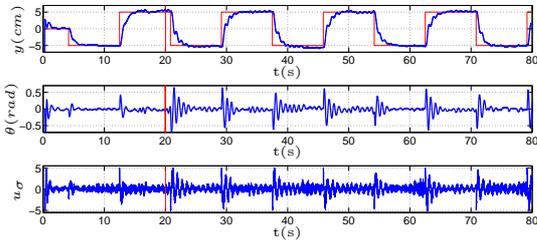


Figura 6: Resultados práticos da direção y : posição y , ângulo θ e sinal de controle u_σ do $2D$ ball balancer (17) utilizando o controlador chaveado (10).

Os resultados experimentais confirmam a eficiência da metodologia proposta. Das Figuras 7 e 8, pode-se notar que com o controlador clássico (3), o sistema seguiu a posição desejada $y = \pm 5$ cm e manteve o ângulo da direção y próximo

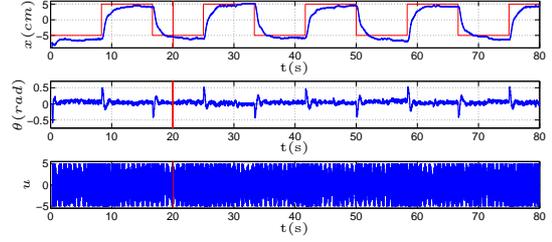


Figura 7: Resultados práticos da direção x : posição x , ângulo θ e sinal de controle u do $2D$ ball balancer (17) utilizando o controlador clássico (3).

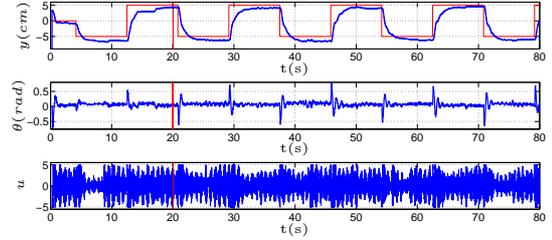


Figura 8: Resultados práticos da direção y : posição y , ângulo θ e sinal de controle u do $2D$ ball balancer (17) utilizando o controlador clássico (3).

de zero, porém exigiu um esforço muito grande de tensão nos motores quando comparado ao controlador chaveado (10) que apresentou um melhor desempenho ao seguir a posição desejada, como pode ser visto nas Figuras 5, 6 e 9.

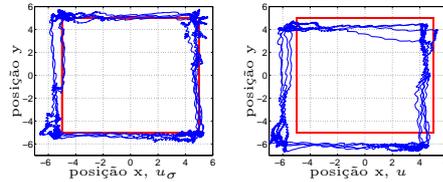


Figura 9: Resultados práticos da posição $x \times y$ do $2D$ ball balancer.

5 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado o projeto e implementação prática de um novo método de projeto de controle chaveado para sistemas lineares com incertezas politópicas proposto em (Souza et al., 2013). As LMIs utilizadas para encontrar os ganhos são menos conservadoras do que as clássicas que utiliza apenas um ganho de realimentação de estado (Boyd et al., 1994). Os resultados de simulação e a implementação prática no controle de um sistema $2D$ ball balancer confirmaram a eficiência do método.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, ao CNPq e a FAPESP (2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Referências

- Barmish, B. (1983). Stabilization of uncertain systems via linear control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(8): 848 – 850.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2011). Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems, *International Journal of Control* **84**(9): 1500–1508.
- Decarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S. and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE* **88**(7): 1069 –1082.
- Feuer, A., Goodwin, G. C. and Salgado, M. (1997). Potential benefits of hybrid control for linear time invariant plants, *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 5, pp. 2790 –2794.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **45**(5): 1915–1930.
- Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2009). Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems, *Automatica* **45**(2): 593 – 597.
- Hespanha, J. P. and Morse, A. S. (2002). Switching between stabilizing controllers, *Automatica* **38**(11): 1905 – 1917.
- Ishii, H. and Francis, B. (2002). Stabilizing a linear system by switching control with dwell time, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(12): 1962 – 1973.
- Leith, D. J., Shorten, R. N., Leithead, W. E., Mason, O. and Curran, P. (2003). Issues in the design of switched linear control systems: A benchmark study, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **17**(2): 103–118.
- Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems* **19**(5): 59 –70.
- Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**(2): 308 –322.
- Lofberg, J. (2004). YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284 –289.
- McClamroch, N. H. and Kolmanovskiy, I. (2000). Performance benefits of hybrid control design for linear and nonlinear systems, *Proceedings of the IEEE* **88**(7): 1083 –1096.
- Otsuka, N. and Soga, T. (2010). Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems composed of two subsystems, *International Journal of Control and Automation* **3**(1): 35 – 42.
- Pettersson, S. (2004). Controller design of switched linear systems, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Vol. 4, pp. 3869 –3874.
- Quanser (2008). *2D Ball Balancer Control using QUARC: Instructor Manual*, Quanser Inc., Canadá.
- Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Santim, M. P. A., Cardim, R. and Assunção, E. (2013). On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties, *Mathematical Problems in Engineering* **2013**: 10.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.
- Sun, Z. and Ge, S. S. (2005). Analysis and synthesis of switched linear control systems, *Automatica* **41**(2): 181 – 195.
- Wicks, M. A., Peleties, P. and DeCarlo, R. A. (1994). Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 4, pp. 3492 –3497.
- Xie, D. and Yu, M. (2006). Stability analysis of switched linear systems with polytopic uncertainties, *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, SMC'06*, Vol. 5, pp. 3749 –3753.
- Zhai, G., Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2003). Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties, *International Journal of Control* **76**(7): 747–753.