

UM ALGORITMO ITERATIVO PARA CONTROLE PREDITIVO NÃO-LINEAR SOB RESTRIÇÕES

JOÃO RICARDO TAVARES GADELHA*, HEITOR BARROS SANTOS*, CARLOS EDUARDO TRABUCO DÓREA*, ADHEMAR DE BARROS FONTES†

* *Universidade Federal do Rio Grande do Norte*
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
59078-900 Natal, RN, Brasil

† *Universidade Federal da Bahia, Departamento de Engenharia Elétrica (aposentado)*
Rua Aristides Novis, 2
40210-630 Salvador, BA, Brasil

Emails: joaoricardotg@gmail.com, heitorsport@hotmail.com, cetdorea@dca.ufrn.br, adhemar@ufba.br

Abstract— This paper presents an iterative algorithm for Model Predictive Control (MPC) of a class of nonlinear systems subject to linear state and control constraints. The basic idea consists in obtaining, at each sample time, a piecewise linear representation of the nonlinear system, by choosing the sequence of future inputs. The resulting quadratic optimization problem is then repeatedly solved until reaching convergence of the sequence of future inputs. In this case, it is proved that no prediction error occurs and, consequently, the state and control constraints are satisfied by the original nonlinear system. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed algorithm regarding convergence and constraint satisfaction. Furthermore, its performance is compared to that of an algorithm which uses the original nonlinear model and nonconvex optimization via Sequential Quadratic Programming (SQP).

Keywords— Predictive Controle, Nonlinear Systems, Constrained Control.

Resumo— Este artigo apresenta um algoritmo iterativo para Controle Preditivo de uma classe de sistemas não-lineares sujeitos a restrições lineares nos estados e no controle. A ideia básica consiste em obter, a cada instante de amostragem, uma representação linear por partes do sistema não-linear, fixando-se a sequência de entradas futuras. O problema de otimização quadrática resultante é então resolvido repetidamente até que a sequência de entradas futuras convirja para um ponto fixo. Neste caso, pode-se provar que as restrições nos estados e no controle são satisfeitas pelo sistema não-linear original. Exemplos numéricos ilustram a efetividade do algoritmo proposto em relação à convergência das iterações e à satisfação das restrições. Além disso, seu desempenho é comparado àquele de um algoritmo que usa o modelo não-linear original e otimização não-convexa por meio de programação quadrática sequencial (SQP).

Keywords— Controle Preditivo, Sistemas Não-Lineares, Controle sob Restrições.

1 Introdução

Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC, do inglês *Model Predictive Control*) é, das técnicas de controle que foram propostas nas últimas décadas, provavelmente aquela que mais sucesso vem encontrando em aplicações industriais (Maciejowski, 2002; Rossiter, 2003; Camacho and Bordons, 2004). Diversas formulações vêm, assim, sendo propostas com o objetivo de se obter o melhor desempenho para os sistemas estudados. Algoritmos numéricos extremamente eficientes são hoje disponíveis para controladores preditivos baseados em modelos lineares, os quais apresentam desempenho aceitável em muitos casos, desde que o sistema trabalhe em uma faixa de operação limitada. Caso essa premissa não seja satisfeita, torna-se necessário partir para formulações nas quais o modelo do sistema a controlar é não-linear, representando melhor as dinâmicas presentes.

Em alguns processos industriais, um modelo bilinear consegue representar bem tais não-linearidades, mas, em outros, nem tanto (Oliveira

Sb. et al., 2012). É então preferível usar um modelo o mais próximo possível da fenomenologia do sistema a controlar. Neste caso, duas alternativas principais se apresentam: a primeira seria formular o problema de Controle Preditivo usando o modelo não-linear original. Isto resultaria, em princípio, na solução ótima do problema. No entanto, o problema de otimização a ser resolvido é não-convexo e possui, em geral, um número grande de variáveis, já que as variáveis de estado ao longo do horizonte de predição têm que ser incluídas. A outra alternativa seria o uso de aproximações lineares do modelo original (Koch et al., 2006; Plucenio et al., 2007). Nesse caso, a otimalidade é sacrificada em nome da eficiência numérica, o que pode resultar em um desempenho pobre em malha fechada. Além disso, caso o sistema possua restrições estritas em suas variáveis de estado, o uso de aproximações lineares não garante que elas não sejam violadas. Um apanhado das técnicas mais recentes de Controle Preditivo Não-Linear pode ser encontrado em (Magni et al., 2011).

Neste artigo, propõe-se resolver o problema de Controle Preditivo não-linear para sistemas

$$\begin{aligned}
\min_{\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+j)} J(k) &= \sum_{i=1}^{H_p} \|r(k+i) - C\hat{x}(k+i)\|_Q + \sum_{j=0}^{H_u-1} \|\hat{u}(k+j)\|_R, \\
\text{Suj. a: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(k+1+i) = f(\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i))\hat{x}(k+i) + g(\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i))\hat{u}(k+i), i = 0, \dots, H_p \\ \hat{x}(k) = x(k) \\ \hat{u}(k+j+1) = \hat{u}(k+j), j = H_u - 1, \dots, H_p - 1 \\ G\hat{x}(k+i) \leq \rho \\ H\hat{u}(k+i) \leq \mu \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{1}$$

sob restrições usando modelos lineares por partes. A cada instante de amostragem, a partir de um primeiro “chute” da sequência futura de entradas de controle, o problema de otimização associado é resolvido repetidamente até sua solução convergir para um ponto fixo. Nesse caso, garante-se, por um lado, que não há erro de predição, o que contribui para a otimalidade da solução e, por outro lado, que as restrições são satisfeitas caso o problema de otimização seja factível. Os modelos adotados contemplam classes amplas de não-linearidades, compreendendo, entre outras, as bilineares e quadráticas. Estende-se, com isso, o algoritmo proposto em (Fontes et al., 2008), exclusivo para sistemas bilineares. Dois exemplos numéricos ilustram a efetividade da proposta, comparando-a a algoritmos que adotam o modelo não-linear original e programação quadrática sequencial (SQP, do inglês *Sequential Quadratic Programming*).

Notação: $\|x\|_Q = (x^T Q x)^{\frac{1}{2}}$ representa a norma vetorial quadrática (Euclidiana), sendo Q uma matriz simétrica, semi-definida positiva. Considerando-se duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, o produto de Kronecker $A \otimes B$ é uma matriz $mp \times nq$ definida por:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1q}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mq}B \end{bmatrix}.$$

2 Formulação do Problema

São considerados neste trabalho sistemas não-lineares de tempo discreto que possam ser representados na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= f(x(k), u(k))x(k) + g(x(k), u(k))u(k), \\
y(k) &= Cx(k),
\end{aligned} \tag{2}$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas, $y \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas e k o instante amostragem, com $k \in \mathbb{N}$. Note-se que este modelo compreende uma classe ampla de não-linearidades, tais como, entre outras, aquelas dos tipos bilinear e quadrática.

Supõe-se que este sistema é sujeito a restrições lineares nas suas variáveis de estado e de controle,

dadas por:

$$Gx(k) \leq \rho, \quad Hu(k) \leq \mu. \tag{3}$$

A estratégia de Controle Preditivo consiste em, a cada instante de amostragem k , calcular uma sequência de entradas $\hat{u}(k+i)$, $i = 0, 1, \dots, H_u - 1$ que resolve o problema de otimização não-linear (1), sendo $J(k)$ o índice de desempenho (função custo) de horizonte finito a ser otimizado, $r(k+i)$ a trajetória de referência futura a ser seguida pela saída $y(k) = Cx(k)$, H_p o horizonte de predição, H_u o horizonte de controle, Q a matriz de ponderação do erro de rastreamento, R a matriz de ponderação do esforço de controle (com Q e R definidas positivas), \hat{x} o vetor de estado predito com base no modelo (2) e \hat{u} o vetor de entradas a ser determinado de modo a otimizar o índice de desempenho.

A minimização de $J(k)$ resulta na sequência de controle $\hat{u}(k+j)$ que otimiza o desempenho predito para o sistema no horizonte H_p . Considerando que o modelo matemático não representa com perfeição o sistema real, a ocorrência de perturbações, a presença de ruídos, além de outras dificuldades que aparecem em aplicações práticas, a estratégia de Controle Preditivo usa o chamado princípio do horizonte móvel, que consiste em aplicar apenas o primeiro elemento da sequência de controle calculada, ou seja, $\hat{u}(k)$, e resolver novamente o problema de otimização no intervalo de amostragem seguinte.

Ressalte-se aqui a necessidade de se conhecer o vetor $x(k)$ para se resolver o problema de otimização, o que configura uma estrutura de realimentação completa de estado.

O problema de otimização (1) é um problema não-linear, não-convexo e com um número de variáveis potencialmente grande, dependendo da dimensão do sistema e dos tamanhos dos horizontes H_p e H_u . O custo computacional para a resolução de tais problemas é, em geral, muito alto, o que dificulta sua aplicação em sistemas de dinâmica rápida, nos quais o período de amostragem não é grande o suficiente para que a resolução do problema ocorra em tempo hábil. Por outro lado, se a dinâmica do sistema for linear, equações lineares explícitas podem ser escritas para representar os estados preditos $\hat{x}(k+i)$ em função das

entradas $\hat{u}(k+j)$. Com isso, o número de variáveis se reduz enormemente e o problema pode ser formulado como um problema de otimização quadrática, para os quais algoritmos eficientes e rápidos são disponíveis. Dessa forma, os métodos que vêm sendo propostos para a resolução de problemas de Controle Preditivo não-linear podem ser, *grossa modo*, divididos em duas classes: os que propõem algoritmos rápidos para resolver o problema (1) e os que propõem diferentes formas de linearização do modelo (2), para poder usufruir dos métodos eficientes de otimização quadrática. O método proposto neste trabalho se insere nessa última categoria e será descrito na próxima seção.

3 Algoritmo Proposto

Considere a equação de predição do estado um passo à frente:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1+i) &= f(\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i))\hat{x}(k+i) \\ &+ g(\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i))\hat{u}(k+i). \end{aligned} \quad (4)$$

Observa-se que se $\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i)$ fossem fixos ao longo do horizonte $i, \dots, H_p - 1$, teríamos a equação de estado de um sistema linear por partes:

$$\hat{x}(k+1+i) = \mathcal{A}_i(\hat{x}, \hat{u})\hat{x}(k+i) + \mathcal{B}_i(\hat{x}, \hat{u})\hat{u}(k+i), \quad (5)$$

sendo $\mathcal{A}_i(\hat{x}, \hat{u}) = f(\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i))$ e $\mathcal{B}_i(\hat{x}, \hat{u}) = g(\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i))$. Evidentemente, $\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i)$ não são conhecidos ao longo do horizonte, já que $\hat{x}(k+i)$ depende das entradas $\hat{u}(k+i)$ futuras. No entanto, podemos pensar em um algoritmo que convirja para os valores preditos corretos, da seguinte forma:

Para cada instante de amostragem k :

1. Fixe $\hat{u}(k+j)$, $j = 0, \dots, H_u - 1$ e use o modelo (2) para determinar os valores futuros de $\hat{x}(k+i)$, $i = 1, \dots, H_p - 1$.
2. Substitua nas equações (4) os valores de $\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i)$ obtidos no passo anterior e obtenha o modelo linear por partes (5).
3. Formule o problema (1) como um problema de otimização quadrática e obtenha sua solução ótima $\hat{u}^*(k+j)$.
4. Use $\hat{u}^*(k+j)$ e o modelo (2) para determinar os valores futuros de $\hat{x}(k+i)$, $i = 1, \dots, H_p$.
5. Repita os passos de 2 a 4 até que $\hat{u}^*(k+j)$ seja igual ao obtido no passo anterior dentro de uma determinada tolerância.

A cada iteração do algoritmo, existe um erro entre os estados preditos e os estados que seriam gerados pelo modelo não-linear original decorrente do seguinte fato: no passo 4, os valores futuros dos estados são calculados a partir da aplicação no

modelo não-linear da sequência ótima de controle calculada no passo 3. No passo 2, esses valores futuros são usados para formar o modelo linear por partes usado na otimização da iteração seguinte. No entanto, esse modelo linear por partes só corresponderia ao modelo não-linear se os valores futuros dos estados não mudassem de uma iteração para outra. Isso ocorreria apenas se a sequência ótima $\hat{u}^*(k+j)$ não se modificasse de uma iteração para outra. Dessa forma, se esse algoritmo convergir, então, ao final, os valores de $\hat{x}(k+i), \hat{u}(k+i)$ preditos pelo modelo linear por partes serão iguais àqueles preditos pelo modelo não-linear original. Com isso, caso o problema de otimização tenha solução factível, garante-se que as restrições (3) são satisfeitas ao longo do horizonte de predição. Trata-se da maior vantagem do método proposto em relação àqueles baseados em aproximações do modelo, que, por melhor que sejam, não podem garantir a satisfação das restrições nos estados.

Um aspecto importante da implementação do algoritmo refere-se à inicialização das iterações (passo 1 do algoritmo). Em se tratando de um problema de seguimento de referência constante, para $k = 0$ pode-se adotar para $\hat{u}(k+j)$ no passo 1 o valor de regime que levaria a saída ao valor da referência. Para $k > 0$, supondo que as iterações de compensação do erro convergiram, uma escolha natural é tomar o valor ótimo da amostra anterior ($k-1$), deslocá-la de uma amostra e repetir o último valor da sequência ($\hat{u}(k-1+H_u)$) na última posição do vetor de entradas preditas a partir de k . Isto justifica-se pelo fato de que a sequência calculada em $k-1$ seria ótima em relação aos valores preditos obtidos após a convergência do algoritmo de compensação dos erros de predição. Nesse caso, os valores de $\hat{u}(k+j)$ calculados tenderiam a ser próximos dos valores ótimos para a amostra seguinte.

Diferentemente das estratégias que focam na resolução direta do problema de otimização não-convexo (1), a estratégia aqui proposta não garante otimalidade. Proporciona, porém, soluções que melhoram a cada iteração do algoritmo. Além disso, pelo fato de realizar predições baseadas em um modelo linear por partes, resolve um problema de otimização quadrática com um número muito menor de variáveis (sem os estados preditos), resultando em um esforço computacional muito menor. Trata-se de vantagem considerável quando se lida com sistemas de dinâmica rápida.

Algumas dificuldades de implementação do algoritmo de compensação dos erros de predição devem, entretanto, ser mencionadas. A primeira se refere a sua convergência, que não é garantida. Em trabalhos anteriores com sistemas bilineares (Fontes et al., 2008), verificou-se que está ligada à inicialização das iterações mais próxima do ponto fixo, e que pode ser reforçada usando-se altos valo-

res da ponderação de controle R . Para contornar essas dificuldades, impõe-se um número máximo de iterações. Ao se atingir esse número, duas situações são possíveis: ou as iterações vinham convergindo lentamente ou vinham divergindo. No primeiro caso, adota-se a solução da última iteração e no segundo a da primeira iteração, o que corresponderia à estratégia chamada de *quasilinear por degrau de tempo* (Fontes et al., 2008). Note-se que, neste caso, o respeito às restrições pelo sistema não-linear não é mais garantido.

4 Exemplos

4.1 Sistema 1

Considera-se o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{K_m u(t) - \bar{a}\sqrt{2gx_1(t)}}{A} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\bar{a}\sqrt{2gx_1(t)} - \bar{a}\sqrt{2gx_2(t)}}{A}\end{aligned}$$

Essas equações representam a dinâmica de um sistema didático de dois tanques acoplados, sendo x_1 e x_2 os níveis dos tanques 1 e 2, respectivamente, e u a tensão de acionamento da bomba que alimenta os tanques com água. K_m , g , \bar{a} e A são, respectivamente, a constante da bomba, a aceleração da gravidade, a área transversal dos orifícios de saída dos tanques e a área da seção transversal de cada tanque (Quanser, 2008).

Aproximando-se as derivadas por diferenças finitas e usando um período de amostragem igual a T_s , obtém-se o seguinte modelo de tempo discreto:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + T_s \left(\frac{K_m u(k) - \bar{a}\sqrt{2gx_1(k)}}{A} \right) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + T_s \left(\frac{\bar{a}\sqrt{2gx_1(k)} - \bar{a}\sqrt{2gx_2(k)}}{A} \right)\end{aligned}$$

Estas equações podem ser postas na forma (2) considerando-se:

$$\begin{aligned}f(x(k), u(k)) &= \begin{bmatrix} 1 & -T_s \frac{\bar{a}\sqrt{2gx_1(k)}}{Ax_2(k)} \\ T_s \left(\frac{\bar{a}\sqrt{2gx_1(k)} - \bar{a}\sqrt{2gx_2(k)}}{Ax_1(k)} \right) & 1 \end{bmatrix} \\ g(x(k), u(k)) &= \begin{bmatrix} T_s K_m \\ A \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Note-se que o agrupamento escolhido não é o único possível para escrever as equações originais na forma (2).

Os parâmetros do sistema são: $K_m = 4,6$, $g = 980\text{cm/s}^2$, $\bar{a} = 0,1781\text{cm}$, $A = 15,5179\text{cm}$. Considera-se o sistema operando em um ponto no qual o nível de ambos os tanques é igual a 15cm. A tensão de entrada da bomba é limitada a $\pm 15\text{V}$. Para evitar transbordamento e que a bomba opere em vazio, os níveis máximo e mínimo que podem atingir ambos os tanques são fixados em 28cm e 2cm, respectivamente.

Considerando-se $T_s = 0,5\text{s}$, horizontes de predição e controle iguais a 5, $Q = 1$, $R = 10^{-4}$, x_2 como saída e 3 mudanças de *set-point* a partir do ponto de operação inicial, foram obtidos os resultados mostrados nas figuras 1, 2 e 3 da aplicação do MPC linear, não linear com SQP e não-linear proposto. Na implementação do método que usa SQP, foi usada a função *fmincon* do pacote de Otimização do *software MATLAB* (MATLAB, 2010).

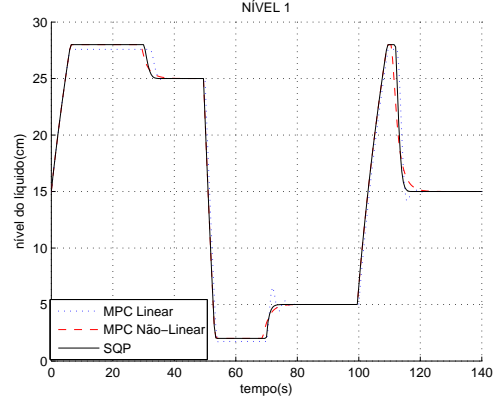


Figura 1: Exemplo 1: resposta do estado 1.

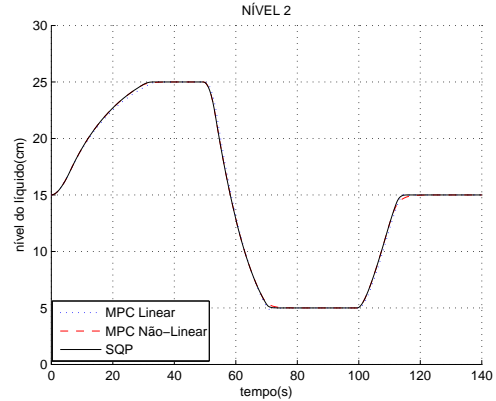


Figura 2: Exemplo 1: resposta do estado 2.

Na tabela 1 são mostrados índices de desempenho obtidos com a aplicação das três estratégias mencionadas.

	MPC Linear	MPC Não-Linear	SQP
erro absoluto médio	0.2220	0.1949	0.1882
erro quadrático médio	29.7920	28.2326	28.2110
potência média de $u(k)$	71.5885	67.3435	70.3993
tempo de execução médio (s)	0.0169	0.0351	0.1723

Tabela 1: Comparação entre os controladores do Exemplo 1.

Da análise dos gráficos e da tabela, verifica-se, como esperado, o melhor desempenho dos controladores não-lineares em relação ao linear, que resultou na violação do limite inferior desejado para

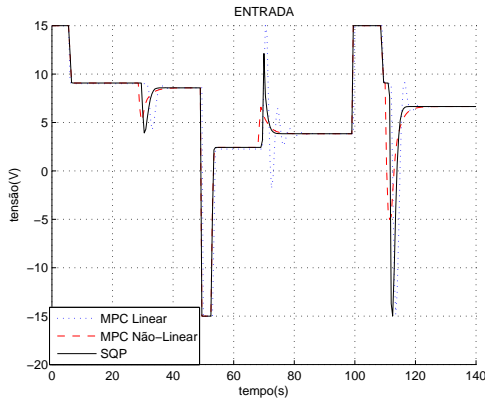


Figura 3: Exemplo 1: sinal de entrada.

x_1 . Verifica-se também um esforço computacional muito menor do algoritmo proposto em relação ao uso de otimização não-linear via SQP.

4.2 Sistema 2

Considera-se o seguinte sistema com não-linearidades do tipo quadrática:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Mx(k) \otimes x(k) \\ &\quad + Nu(k) \otimes x(k) + Ou(k) \otimes u(k), \\ y(k) &= Cx(k). \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,4710 & 0,2657 & 0,3395 & -0,1120 \\ -0,1218 & 0,7315 & 0,7050 & -0,0341 \\ 0,2792 & -1,6963 & -1,4691 & -0,0164 \\ 0,1354 & -1,2920 & -0,9088 & -0,2753 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,4198 & -0,0038 \\ 0,0606 & 0,1039 \\ 0,2457 & 0,2833 \\ 0,6440 & 0,1378 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = [M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4]$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0,0065 & 0,0088 & 0,0078 & 0,0005 \\ 0,0007 & 0,0044 & 0,0011 & 0,0047 \\ 0,0028 & 0,0076 & 0,0098 & 0,0033 \\ 0,0028 & 0,0060 & 0,0085 & 0,0063 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0,0023 & 0,0045 & 0,0011 & 0,0081 \\ 0,0058 & 0,0004 & 0,0046 & 0,0070 \\ 0,0060 & 0,0051 & 0,0045 & 0,0087 \\ 0,0060 & 0,0041 & 0,0055 & 0,0005 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0,0022 & 0,0045 & 0,0051 & 0,0075 \\ 0,0046 & 0,0033 & 0,0020 & 0,0037 \\ 0,0096 & 0,0006 & 0,0043 & 0,0094 \\ 0,0079 & 0,0074 & 0,0017 & 0,0002 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0,0083 & 0,0073 & 0,0029 & 0,0058 \\ 0,0063 & 0,0009 & 0,0018 & 0,0064 \\ 0,0054 & 0,0088 & 0,0093 & 0,0065 \\ 0,0065 & 0,0001 & 0,0007 & 0,0086 \end{bmatrix}$$

$$N = [N_1 \quad N_2]$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0,0080 & 0,0070 & 0,0064 & 0,0099 \\ 0,0099 & 0,0038 & 0,0086 & 0,0056 \\ 0,0016 & 0,0097 & 0,0040 & 0,0093 \\ 0,0024 & 0,0097 & 0,0063 & 0,0072 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0,0090 & 0,0004 & 0,0075 & 0,0096 \\ 0,0100 & 0,0062 & 0,0066 & 0,0054 \\ 0,0065 & 0,0057 & 0,0052 & 0,0003 \\ 0,0011 & 0,0096 & 0,0026 & 0,0070 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0,0048 & 0,0040 & 0,0052 & 0,0023 \\ 0,0064 & 0,0099 & 0,0006 & 0,0011 \\ 0,0089 & 0,0040 & 0,0089 & 0,0031 \\ 0,0020 & 0,0066 & 0,0033 & 0,0023 \end{bmatrix}$$

Note-se que, para escrever o modelo na forma (2), é possível agrupar o termo bilinear ($Nu(k) \otimes x(k)$) tanto na função $f(x(k), u(k))$ quanto na função $g(x(k), u(k))$. As duas alternativas foram testadas, tendo a primeira fornecido melhores resultados, sendo, portanto, aquela adotada aqui.

Consideram-se as seguintes restrições nas saídas e entradas:

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -15 \\ -11,6154 \\ -9,0155 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 11,6154 \\ 9,0155 \end{bmatrix}$$

Para o sistema em repouso, são aplicados sinais de referência constantes, iguais a 15 e 10, para y_1 e y_2 respectivamente.

Com horizontes de predição e controle iguais a 5, $Q = I$, foram obtidos os resultados mostrados nas figuras 4 e 5 da aplicação do MPC linear, não-linear via SPQ e não-linear proposto, com $R = 10^{-4}$ para os métodos não-lineares e $R = 1$ para o linear. Este valor foi usado no caso linear porque valores menores resultaram em erros de regime permanente muito elevados.

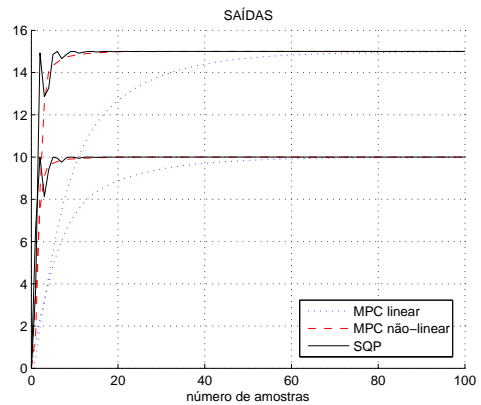


Figura 4: Exemplo 2: resposta dos estados.

Na tabela 2 são mostrados índices de desempenho obtidos com a aplicação das três estratégias mencionadas.

Neste exemplo, verifica-se, mais uma vez, a superioridade dos controladores que usam modelos não-lineares. O controlador baseado em SQP

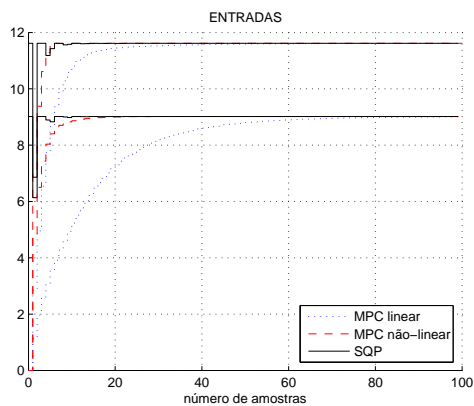


Figura 5: Exemplo 2: sinais de entrada.

SAÍDA 1	MPC Linear	MPC Não-Linear	SQP
erro absoluto médio	0,9498	0,2145	0,1628
erro quadrático médio	4,4604	1,4932	1,1518
potência média de $u_1(k)$	126,176	131,948	133,776
tempo de execução médio (s)	0,0148	0,0496	0,4645
SAÍDA 2	MPC Linear	MPC Não-Linear	SQP
erro absoluto médio	1,7616	0,4131	0,3107
erro quadrático médio	13,5193	4,5591	3,6053
potência média de $u_2(k)$	65,9987	78,6563	80,8709
tempo de execução médio (s)	0,0148	0,0496	0,4645

Tabela 2: Comparação entre os controladores do Exemplo 2.

apresentou índices de desempenho ligeiramente superiores ao MPC não-linear proposto, porém com um tempo de execução médio mais de 10 vezes superior.

5 Conclusões

Neste trabalho foi proposto um algoritmo iterativo para Controle Preditivo não-linear de sistemas sujeitos a restrições, baseado em aproximações lineares por parte do modelo não-linear original. Sua vantagem em relação a abordagens similares é o fato de garantir o respeito de restrições, caso o processo iterativo proposto convirja, já que, neste caso, não haveria erro de predição. Resultados de experimentos numéricos mostraram desempenho próximo ao obtido com algoritmos que usam o modelo não-linear original, com um custo computacional significativamente menor. Estudos futuros devem investigar formas de garantir a convergência do processo iterativo, sem a qual o respeito às restrições não é garantido. Deve-se também estudar maneiras sistemáticas de converter modelos não-lineares à forma requerida para a aplicação do método proposto e avaliar o grau de subotimalidade da solução. Comparação com outros métodos baseados em soluções aproximadas deve ser também objeto de estudo.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado por FINEP e CNPq, por meio do projeto REDIC-

ADAP (Estudo e Implementação de Controladores Avançados Adaptativos em Sistemas de Petróleo e Gás) e realizado no Laboratório de Automação em Petróleo (LAUT - UFRN).

Referências

- Camacho, E. F. and Bordons, C. (2004). *Model Predictive Control*, Springer-Verlag Ltd.
- Fontes, A., Dórea, C. and Garcia, M. (2008). An iterative algorithm for constrained mpc with stability of bilinear systems, *Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, pp. 1526–1531.
- Koch, S., Duraiski, R., Fernandes, P. and Trierweiler, J. (2006). NMPC with state-space models obtained through linearization on equilibrium manifold, *Proc. Int. Symp. on Advanced Control of Chemical Process*, pp. 1015–1020.
- Maciejowski, J. M. (2002). *Predictive Control with Constraints*, Person Education Limited.
- Magni, L., Raimondo, D. and Allgöwer, F. (2011). *Nonlinear Model Predictive Control: Towards New Challenging Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer.
- MATLAB (2010). *version 7.10.0 (R2010a)*, The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, EUA.
- Oliveira Sb., M., Fontes, A. and Dórea, C. (2012). Desenvolvimento de um controlador preditivo não linear baseado em modelo compensado aplicado a uma coluna de destilação simulada, caracterizada por um modelo NARMAX, *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, pp. 1711–1718.
- Plucenio, A., Pagano, D., Bruciapaglia, A. and Normey-Rico, J. (2007). A practical approach to predictive control for nonlinear processes, *Proc. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*.
- Quanser (2008). *Coupled Water Tanks - Product Information Sheet*, Quanser Inc. <http://www.quanser.com/>.
- Rossiter, J. A. (2003). *Model-Based Predictive Control: A Practical approach*, CRC Press LLC.