

# SIMPLIFICAÇÃO DE UM CONTROLADOR ADAPTATIVO BACKSTEPPING PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS NÃO-LINEARES UTILIZANDO UM DIFERENCIADOR HÍBRIDO GLOBAL

KURIOS QUEIROZ\*, SAMAHERNI DIAS\*, ALDAYR ARAÚJO\*, DARLAN FERNANDES†

\*UFRN-Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Campus Universitário, Lagoa Nova, CEP 59072-970  
Natal, Rio Grande do Norte, Brasil  
<http://www.laci.ufrn.br>

†UFPB-Universidade Federal da Paraíba  
Cidade Universitária, Castelo Branco, CEP 58051-900  
João Pessoa, Paraíba, Brasil

Emails: [kurios@laci.ufrn.br](mailto:kurios@laci.ufrn.br), [sama@laci.ufrn.br](mailto:sama@laci.ufrn.br), [aldayr@dca.ufrn.br](mailto:aldayr@dca.ufrn.br),  
[darlan@cear.ufpb.br](mailto:darlan@cear.ufpb.br)

**Abstract**— This paper presents a simplified adaptive backstepping controller for a class of nonlinear systems using a global hybrid differentiator. Instead of partial derivatives, the controller uses a hybrid estimation scheme, which combines a linear differentiator (lead filter) with a Robust Exact Differentiator (RED). This modification simplifies the controller design (tuning functions approach), and consequently the control law. Simulation results for a nonlinear system given by a high-performance aircraft are shown.

**Keywords**— Adaptive Control, Tuning Functions Approach, Adaptive Backstepping Controller, Hybrid Differentiator, Robust Exact Differentiator.

**Resumo**— Este artigo apresenta um controlador adaptativo *backstepping* simplificado para uma classe de sistemas não-lineares utilizando um diferenciador híbrido global. Ao invés de derivadas parciais, o controlador proposto utiliza um cenário híbrido de estimação que combina um diferenciador linear convencional (filtro *lead*), com um diferenciador exato e robusto (*Robust Exact Differentiator*, RED). Esta modificação simplifica o projeto do controlador na sua abordagem por funções de sintonia (*tuning functions approach*), assim como a sua respectiva lei de controle. Resultados de simulação para um sistema não-linear dado por um avião de alta performance são apresentados.

**Palavras-chave**— Controle Adaptativo, Abordagem por Funções de Sintonia, Controle Adaptativo *Backstepping*, Diferenciador Híbrido, Diferenciador Exato e Robusto.

## 1 Introdução

A principal ideia da técnica *backstepping* é projetar um controlador recursivamente, considerando algumas das variáveis de estado como **controles virtuais** (*virtual controls*) e projetando para elas leis de controle intermediárias. As leis adaptativas para estimação dos parâmetros são obtidas com base na teoria de Lyapunov, porém com a possibilidade de sobre-parametrização (existência de várias leis de adaptação para um mesmo parâmetro). Este problema foi parcialmente reduzido por Jiang and Praly (1991), e totalmente solucionado por Krstić et al. (1992), através da abordagem por **funções de sintonia** (*tuning functions*). Elas correspondem a uma forma mais avançada do controle adaptativo *backstepping*, com a vantagem da ordem do controlador ser a menor possível.

Apesar dos benefícios apresentados pelo controle adaptativo *backstepping* e sua abordagem através das funções de sintonia, algumas desvantagens podem ser observadas. A principal delas está relacionada com as complexas expressões não-lineares do controlador, que podem crescer significativamente em função da ordem do sistema. Com o objetivo de simplificar a estrutura do controla-

dor adaptativo *backstepping* por funções de sintonia, o diferenciador híbrido global proposto em (Nunes et al., 2004) será utilizado neste trabalho. Os tradicionais sinais  $\dot{\alpha}_i(t)$  presentes na lei de controle da técnica *backstepping* serão obtidos através de uma combinação entre um diferenciador linear convencional (filtro *lead*), e o diferenciador exato e robusto (*Robust Exact Differentiator*, RED) proposto por Levant (1998).

É interessante ressaltar que as funções de estabilização  $\alpha_i(t)$  normalmente dependem de muitas variáveis do sistema como, por exemplo, a saída de um modelo de referência e suas respectivas derivadas, parâmetros estimados da planta, sinais filtrados da entrada e da saída do sistema, etc. Dessa forma, o cálculo de  $\dot{\alpha}_i(t)$  utilizando derivadas parciais (formato original do *backstepping*) se torna proibitivo, em virtude de uma “explosão de termos” que surge na estrutura do controlador.

Diversos trabalhos na literatura buscam evitar o uso de derivadas parciais, com destaque para as técnicas *Dynamic Surface Control* (Swaroop et al., 2000) e *Command Filtering* (Dong et al., 2012) que utilizam filtros lineares na estimação das derivadas. Modos deslizantes de ordem superior na forma do diferenciador exato e robusto

(RED) também merecem destaque (Davila, 2013). Na abordagem com filtros, as provas de estabilidade garantem um erro de estimação suficientemente pequeno, porém não nulo, e cuja ordem depende dos parâmetros do filtro. Já com o RED, apenas propriedades locais de estabilidade são garantidas, o que nem sempre é satisfatório ou desejável. A ideia do presente trabalho é apresentar uma proposta capaz de garantir a estabilidade global do sistema (característica do filtro linear), assim como um erro em regime nulo (característica do RED), combinando as duas estratégias de derivação. Esta técnica já foi utilizada com sucesso em (Nunes et al., 2009) e (Nunes et al., 2008), respectivamente para sistemas lineares e não-lineares, o que nos fornece um bom indicativo de funcionamento.

## 2 Definição do Problema

Considere o sistema não-linear do tipo *strict-feedback* descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_1)^T \theta \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})^T \theta \\ \dot{x}_n &= \beta(x)u + \varphi_n(x)^T \theta \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\theta \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de parâmetros constantes, porém desconhecidos. Os termos  $\beta$  e  $[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$  são funções não-lineares suaves conhecidas com argumentos em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\beta(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . O objetivo de controle é forçar  $y(t)$  (saída do sistema) a seguir um sinal de referência  $y_r(t)$ , mantendo todos os sinais em malha fechada uniformemente limitados. A referência  $y_r(t)$  pode ser a saída de um modelo de referência com uma entrada  $r(t)$  limitada e contínua por partes, ou um sinal cujas primeiras  $n$  derivadas são conhecidas, uniformemente limitadas, e contínua por partes. No caso do modelo de referência, considere o seguinte sistema linear e estável

$$y_r(s) = \frac{k_m}{s^n + m_{n-1}s^{n-1} + \dots + m_0} r(s), \quad (2)$$

onde  $s^n + m_{n-1}s^{n-1} + \dots + m_0$  é um polinômio Hurwitz e o ganho  $k_m$  é positivo.

## 3 Controlador Adaptativo Backstepping Modificado

Nesta seção, o controlador adaptativo *backstepping* para a classe de sistemas não-lineares (1) será adaptado com base na abordagem por funções de sintonia apresentada por Kokotović et al. (1995). A forma de projetar é semelhante, entretanto sem

a utilização das derivadas parciais na estrutura do controlador. Para tal, considere as seguintes variáveis de erro

$$z_1 = x_1 - y_r \quad (3)$$

$$z_i = x_i - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}, \quad (4)$$

e as funções de estabilização

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - w_1^T \hat{\theta} \quad (5)$$

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - w_i^T \hat{\theta} + \dot{\alpha}_{i-1}, \quad (6)$$

para  $i = 2, \dots, n$ , onde  $c_i$  são constantes positivas e  $w_i = \varphi_i$ . Com base nas funções de sintonia,

$$\tau_1 = w_1 z_1 \quad (7)$$

$$\tau_i = \tau_{i-1} + w_i z_i, \quad (8)$$

para  $i = 2, \dots, n$ , na lei de controle

$$u = \frac{1}{\beta(x)} (\alpha_n + y_r^{(n)}), \quad (9)$$

e nas leis adaptativas

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n, \quad (10)$$

o principal resultado do controlador adaptativo *backstepping* modificado é apresentado no seguinte teorema.

**Teorema 1** *Todos os sinais em malha fechada do sistema adaptativo composto pela planta (1), pela lei de controle (9) e pelas leis adaptativas (10) são globalmente uniformemente limitados, e o rastreamento da saída do sistema  $y(t)$ , em relação ao sinal de referência  $y_r(t)$ , é alcançado assintoticamente:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_r(t)] = 0. \quad (11)$$

**Prova:** A prova deste teorema é dividida em  $n$  passos, conforme o procedimento a seguir.

*Passo 1:* Considere o erro de saída (3) e a sua derivada através de (1)

$$\dot{z}_1 = x_2 + \varphi_1(x_1)^T \theta - \dot{y}_r. \quad (12)$$

Utilizando a expressão  $x_2 = z_2 + \dot{y}_r + \alpha_1$  obtida a partir de (4) para  $i = 2$ , temos

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + w_1^T \theta, \quad w_1 = \varphi_1(x_1). \quad (13)$$

Agora, considere o erro de estimação

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}, \quad (14)$$

a candidata a função de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \quad (15)$$

e a sua derivada através de (13) e (14),

$$\dot{V}_1 = z_1 \left( z_2 + \alpha_1 + w_1^T \hat{\theta} \right) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left( \dot{\hat{\theta}} - \Gamma w_1 z_1 \right). \quad (16)$$

Escolhendo a função de estabilização

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - w_1^T \hat{\theta}, \quad (17)$$

obtemos a seguinte expressão

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \quad (18)$$

onde a primeira função de sintonia é definida como

$$\tau_1 = w_1 z_1. \quad (19)$$

*Passo 2:* Considere agora o erro  $z_2$  (4) e a sua derivada através de (1),

$$\dot{z}_2 = x_3 + \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1. \quad (20)$$

Utilizando  $x_3 = z_3 + \ddot{y}_r + \alpha_2$  obtida de (4) para  $i = 3$ , temos

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + w_2^T \theta - \dot{\alpha}_1, \quad w_2 = \varphi_2(x_1, x_2). \quad (21)$$

Considere a candidata a função de Lyapunov

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2, \quad (22)$$

e a sua derivada através de (14), (18) e (21),

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1 z_1^2 + z_2 \left( z_1 + z_3 + \alpha_2 + w_2^T \hat{\theta} - \dot{\alpha}_1 \right) \\ & + \tilde{\theta}^T \left( \tau_1 + w_2 z_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Escolhendo a seguinte função de estabilização

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 + \dot{\alpha}_1 - w_2^T \hat{\theta}, \quad (24)$$

obtemos a expressão

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \quad (25)$$

onde a segunda função de sintonia é dada por

$$\tau_2 = \tau_1 + w_2 z_2. \quad (26)$$

*Passo i:* Considere o erro  $z_i$  (4) e a sua derivada através de (1),

$$\dot{z}_i = x_{i+1} + \varphi_i(x_1, \dots, x_i)^T \theta - y_r^{(i)} - \dot{\alpha}_{i-1}. \quad (27)$$

Utilizando  $x_{i+1} = z_{i+1} + y_r^{(i)} + \alpha_i$  obtida de (4) para  $i = i + 1$ , temos

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + w_i^T \theta - \dot{\alpha}_{i-1}, \quad w_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_i). \quad (28)$$

Considere a candidata a função de Lyapunov

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2, \quad (29)$$

e a sua derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 \\ & + z_i \left( z_{i-1} + z_{i+1} + \alpha_i + w_i^T \hat{\theta} - \dot{\alpha}_{i-1} \right) \\ & + \tilde{\theta}^T \left( \tau_{i-1} + w_i z_i - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Escolhendo a seguinte função de estabilização

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - w_i^T \hat{\theta} + \dot{\alpha}_{i-1}, \quad (31)$$

obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & - \sum_{k=1}^i c_k z_k^2 + z_i z_{i+1} \\ & + \tilde{\theta}^T \left( \tau_i - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

onde a nova função de sintonia é definida como

$$\tau_i = \tau_{i-1} + w_i z_i. \quad (33)$$

*Passo n:* Considere o erro  $z_n$  (4) e a sua derivada através de (1),

$$\dot{z}_n = \beta(x)u + \varphi_n(x)^T \theta - y_r^{(n)} - \dot{\alpha}_{n-1}. \quad (34)$$

Considere a candidata a função de Lyapunov

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2, \quad (35)$$

e a sua derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 \\ & + z_n \left( z_{n-1} + \beta u + w_n^T \hat{\theta} - y_r^{(n)} - \dot{\alpha}_{n-1} \right) \\ & + \tilde{\theta}^T \left( \tau_{n-1} + w_n z_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

onde  $w_n = \varphi_n(x)$ . Escolhendo a seguinte função de estabilização

$$u = \frac{1}{\beta} \left( -c_n z_n - z_{n-1} - w_n^T \hat{\theta} + \dot{\alpha}_{n-1} + y_r^{(n)} \right), \quad (37)$$

obtemos a expressão final

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right). \quad (38)$$

onde a segunda função de sintonia é definida como

$$\tau_n = \tau_{n-1} + w_n z_n. \quad (39)$$

Por fim, escolhendo

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n, \quad (40)$$

obtemos

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2, \quad (41)$$

garantindo que  $[z, \tilde{\theta}]^T = [0, 0]^T$  é um ponto de equilíbrio globalmente uniformemente estável. Utilizando o teorema de LaSalle-Yoshizawa (Krstić et al., 1994),  $z \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 4 O Diferenciador Híbrido Global

### 4.1 O Diferenciador Linear

A função de transferência do diferenciador linear (filtro *lead*) a ser utilizado no cenário proposto é dado por

$$v_f = \frac{s}{\tau_f s + 1} f(t) \quad (42)$$

onde  $\tau_f$  corresponde a constante de tempo do filtro,  $v_f$  corresponde a saída, e  $f(t)$  corresponde a entrada. Note que quando  $\tau_f \rightarrow 0$ , o erro entre a saída do filtro (estimativa para a derivada) e  $\dot{\alpha}_i$  (valor ideal) também tende a zero.

### 4.2 O Diferenciado Exato e Robusto (RED)

Considere um sinal de entrada  $f(t)$  como uma função localmente limitada e definida no intervalo  $[0, \infty)$ . Suponha ainda que  $f(t)$  é composta por um sinal base  $f_0(t)$ , cuja primeira derivada possui uma constante de Lipschitz  $C > 0$ , e um ruído desconhecido, porém uniformemente limitado. Introduzindo o sistema auxiliar

$$\dot{z} = v_r, \quad (43)$$

o seguinte algoritmo pode ser aplicado para manter  $z - f(t) = 0$

$$\begin{aligned} v_r &= -\lambda_1 |z - f(t)|^{1/2} \text{sgn}(z - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= -\lambda_2 \text{sgn}(z - f(t)), \end{aligned} \quad (44)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2$  são constantes positivas, e a saída do diferenciador é dada por  $v_r(t)$ . Um dos principais resultados para este diferenciador (denominado de RED) é apresentado no teorema a seguir.

#### Teorema 2 (Critério de Convergência)

Considere o diferenciador (43)-(44) e um sinal de entrada  $f(t) = f_0(t)$ . Para qualquer  $\lambda_2 > C$ , com  $\lambda_1$  suficientemente grande

$$\lambda_1 > 2 \frac{(\lambda_2 + C)^2}{(\lambda_2 - C)}, \quad (45)$$

o sinal  $v_r(t)$  converge em tempo finito para  $\dot{f}_0(t)$ .

**Prova:** A prova deste teorema pode ser encontrada no trabalho de Levant (1998).  $\square$

### 4.3 A lei de Chaveamento

A ideia do estimador híbrido (Nunes et al., 2009) é utilizar uma combinação convexa entre o diferenciador linear (42) e o diferenciador exato e robusto (44) de acordo com a expressão

$$v_g = \sigma(\epsilon) v_f + [1 - \sigma(\epsilon)] v_r, \quad (46)$$

onde  $\epsilon = v_f - v_r$  é a diferença entre os diferenciadores e  $\sigma(\epsilon)$  corresponde a lei de chaveamento

com valores no intervalo de  $[0, 1]$ . Esta lei é definida como

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\epsilon| < \bar{d} - \Delta \\ (|\epsilon| - \bar{d} + \Delta)/\Delta, & \text{se } \bar{d} - \Delta \leq |\epsilon| < \bar{d} \\ 1, & \text{se } |\epsilon| \geq \bar{d}, \end{cases} \quad (47)$$

onde o parâmetro  $0 < \Delta < \bar{d}$  é utilizado para suavizar a função de chaveamento  $\sigma(\epsilon)$ . Note que se o erro entre os diferenciadores for suficientemente grande ( $|\epsilon| \geq \bar{d}$ ), o diferenciador linear é selecionado, uma vez que  $\sigma = 1$ . Por outro lado, se o erro for suficientemente pequeno ( $|\epsilon| < \bar{d} - \Delta$ ), o RED é então escolhido, em virtude de  $\sigma = 0$ . Para valores intermediários, uma combinação de ambos é utilizada. O objetivo desta estratégia é obter inicialmente uma boa estimativa para a derivada do sinal  $\alpha_i$  (com um erro na ordem de  $\tau_f$ ), e em seguida, utilizar o RED para encontrar o valor exato da derivada. Apesar das características de convergência em tempo finito e robustez na presença de ruído (Levant, 1998), o RED não pode ser utilizado sozinho. O motivo está relacionado com a primeira derivada de  $\alpha_i(t)$  que deve possuir uma constante de Lipschitz conhecida ( $C > 0$ ). Caso esta hipótese não seja atendida, o sistema poderá até se instabilizar como apresentado em (Nunes et al., 2004).

## 5 Resultados de Simulação

Nesta seção, alguns resultados de simulação para um sistema não-linear de terceira ordem serão apresentados. O fenômeno apresentado aqui é conhecido como *wing rock* e corresponde a existência de um ciclo limite no eixo longitudinal de um avião de alta performance<sup>1</sup>. Os elementos responsáveis por atuar neste eixo são os *aileron*s, cuja dinâmica será representada por um sistema de primeira ordem. O exemplo proposto nesta seção é semelhante ao descrito no trabalho de Krstić et al. (1994). Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p \\ \dot{p} &= \theta_1 + \theta_2 \phi + \theta_3 p \\ &\quad + \theta_4 |\phi| p + \theta_5 |p| p + \delta_A \\ \tau \dot{\delta}_A &= -\delta_A + u, \end{aligned} \quad (48)$$

onde  $\phi$  é o ângulo no eixo longitudinal,  $\delta_A$  é o ângulo de deflexão do *aileron*,  $\tau$  é a constante de tempo associada ao sistema de acionamento, e  $u$  é o sinal de controle. Definindo as novas variáveis  $\varphi(\phi, p) = [1, \phi, p, |\phi| p, |p| p]^T$  e  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$ , podemos reescrever o sis-

<sup>1</sup>Assista ao vídeo disponibilizado pela NASA *on-line* no endereço <http://www.youtube.com/watch?v=9NaLjLJkCOM>.

tema não-linear (48) como

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= p \\ \dot{p} &= \delta_A + \varphi(\phi, p)^T \theta \\ \dot{\delta}_A &= \frac{1}{\tau} u - \frac{1}{\tau} \delta_A.\end{aligned}\quad (49)$$

Considere agora o modelo de referência

$$\phi_r(s) = \frac{1}{(s+10)(s^2+4s+24.25)} r(s), \quad (50)$$

onde a entrada é definida por  $r(s) = 0$ . O objetivo de controle é forçar  $\phi(t)$  a seguir o sinal de referência  $\phi_r(t)$ , mantendo todos os sinais em malha fechada uniformemente limitados. Em outras palavras, deseja-se levar o sistema suavemente para a origem, com um certo desempenho especificado pelo modelo de referência (50). Para tal, considere os seguintes erros

$$z_1 = \phi - \phi_r \quad (51)$$

$$z_2 = p - \dot{\phi}_r - \alpha_1 \quad (52)$$

$$z_3 = \delta_A - \ddot{\phi}_r - \alpha_2, \quad (53)$$

as funções de estabilização,

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 \quad (54)$$

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \varphi^T \hat{\theta} + \dot{\alpha}_1, \quad (55)$$

a lei de controle,

$$u = \tau \left( -c_3 z_3 - z_2 + \frac{1}{\tau} \delta_A + \dot{\alpha}_2 + \ddot{\phi}_r \right) \quad (56)$$

a lei adaptativa,

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2 = \Gamma \varphi z_2, \quad (57)$$

e o diferenciador híbrido (46) na obtenção das funções  $\dot{\alpha}_1(t)$  e  $\dot{\alpha}_2(t)$ . O comportamento do sistema é apresentado na Figura 1 para o sistema em malha aberta excitado por um degrau unitário (linha cheia) e para o controlador adaptativo *backstepping* com uso do diferenciador híbrido (linha pontilhada). Adicionalmente, as Figuras 2-4 apresentam o sinal de controle e as duas funções de chaveamento utilizadas<sup>2</sup>. Note que o controlador proposto consegue suprimir o ciclo limite, levando o sistema suavemente para a origem,  $\phi(\infty) = \dot{\phi}(\infty) = 0$ . As condições iniciais utilizadas foram  $\phi(0) = 0.5$ ,  $p(0) = \delta(0) = 0$ , os parâmetros do sistema dados por

$$\theta = [0, -26.67, 0.76, -2.92, 0]^T,$$

e a constante de tempo dos *ailerons*,  $\tau = 0,67$ . O ganho adaptativo escolhido foi  $\Gamma = 0.02I$ , onde  $I$

<sup>2</sup>Para a lei de controle (56), dois diferenciadores híbridos foram utilizados, um para estimar a função  $\dot{\alpha}_1(t)$ , e outro para  $\dot{\alpha}_2(t)$ . Consequentemente, duas funções de chaveamento foram necessárias.

corresponde a matriz identidade. Já a inicialização dos parâmetros estimados foi

$$\hat{\theta}(0) = [0, -36.00, 1.03, -3.94, 0]^T,$$

e os parâmetros do controlador (constantes auxiliares),  $c_1 = c_2 = c_3 = 5$ . Por fim, os parâmetros dos diferenciadores híbridos:  $\tau_{f1} = \tau_{f2} = 0.01$  para os filtros *lead*;  $\lambda_{1r1} = \lambda_{2r1} = \lambda_{1r2} = \lambda_{2r2} = 10$  para os REDs; e  $\bar{d}_1 = 0.1$ ,  $\bar{d}_2 = 1$ ,  $\Delta_1 = 0.02$ ,  $\Delta_2 = 0.2$  para as leis de chaveamento. O método de integração numérica utilizado foi o método de Euler com um passo de integração  $h = 10^{-4}$ .

Comparada a lei de controle original para este mesmo exemplo<sup>3</sup>,

$$\begin{aligned}u &= \tau \left[ -c_3 z_3 - z_2 + \frac{1}{\tau} \delta_A + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi} p \right. \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_2}{\partial p} \left( \delta_A + \varphi^T \hat{\theta} \right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi_r} \dot{\phi}_r \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi_r} \ddot{\phi}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} + \ddot{\phi} \right], \quad (58)\end{aligned}$$

a estratégia proposta (56) simplifica significativamente a estrutura do controlador adaptativo *backstepping*, uma vez que as derivadas parciais das funções de estabilização  $\alpha_i(t)$  não são mais necessárias. Esta modificação é muito interessante quando a ordem do sistema é elevada, ou quando existem muitos parâmetros desconhecidos a serem estimados. Em termos de desempenho, o controlador *backstepping* original apresenta um resultado semelhante ao controlador proposto, e dessa forma, a simulação do sistema com (58) foi omitida.

## 6 Conclusões e Considerações Finais

Neste trabalho, foi apresentado um controlador adaptativo *backstepping* para uma classe de sistemas não-lineares. A principal motivação foi simplificar o controlador adaptativo *backstepping* original, evitando o uso de derivadas parciais em sua lei de controle. A ferramenta básica utilizada foi um diferenciador híbrido global que combina um diferenciador linear convencional (filtro *lead*), e um diferenciador exato e robusto (*Robust Exact Differentiator*, RED), através de uma lei de chaveamento suave. Resultados de simulação também foram apresentados de modo a corroborar os estudos teóricos.

## Referências

Davila, J. (2013). Exact tracking using backstepping control design and high-order sliding modes, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **PP**(99): 1–1.

<sup>3</sup>Esta lei de controle foi apresentada em (Kokotović et al., 1995) para o sistema (49) utilizando o controlador adaptativo *backstepping* na sua abordagem por funções de sintonia.

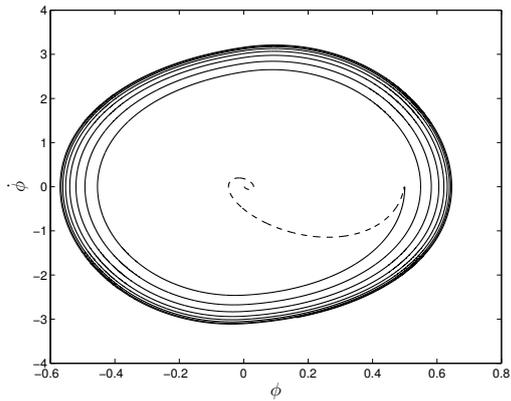


Figura 1: Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada).

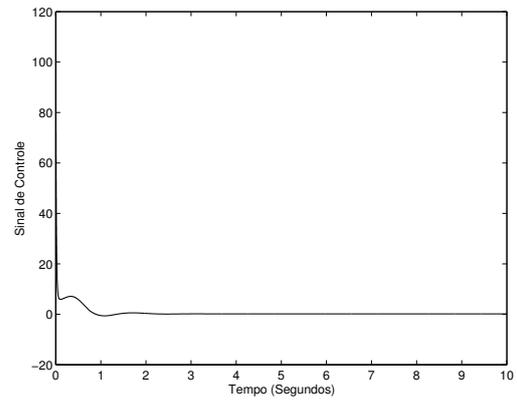


Figura 2: Sinal de controle para para o controlador adaptativo *backstepping* proposto.

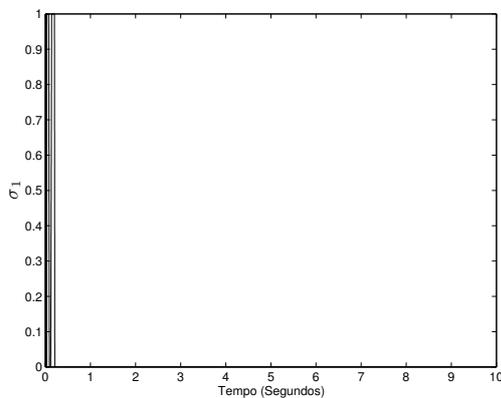


Figura 3: Função de chaveamento  $\sigma_1(\epsilon)$  utilizada para estimar  $\dot{\alpha}_1(t)$ .

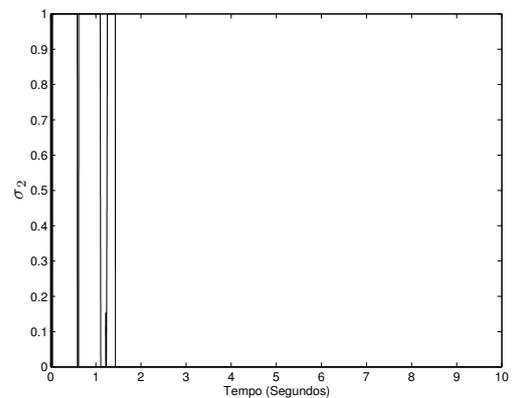


Figura 4: Função de chaveamento  $\sigma_2(\epsilon)$  utilizada para estimar  $\dot{\alpha}_2(t)$ .

Dong, W., Farrell, J., Polycarpou, M., Djapic, V. and Sharma, M. (2012). Command filtered adaptive backstepping, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **20**(3): 566–580.

Jiang, Z. P. and Praly, L. (1991). Iterative designs of adaptive controllers for systems with nonlinear integrators, *Proceedings of Conference on Decision and Control*, Brighton, UK, pp. 2482–2487.

Kokotović, P., Kanellakopoulos, I. and Krstić, M. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons, Nova Iorque EUA.

Krstić, M., Kanellakopoulos, I. and Kokotović, P. (1994). Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**: 752–783.

Krstić, M., Kanellakopoulos, I. and Kokotović, P. V. (1992). Adaptive nonlinear control without overparametrization, *Systems and Control Letters* **19**: 177–185.

Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique, *Automatica* **34**: 379–384.

Nunes, E., Hsu, L. and Lizarralde, F. (2004). Globally stable output-feedback sliding mode control with asymptotic exact tracking, *American Control Conference.*, Vol. 1, pp. 638–643 vol.1.

Nunes, E., Hsu, L. and Lizarralde, F. (2008). Global output feedback tracking controller based on hybrid estimation for a class of uncertain nonlinear systems., *International Workshop on Variable Structure Systems.*, pp. 141–146.

Nunes, E., Hsu, L. and Lizarralde, F. (2009). Global exact tracking for uncertain systems using output-feedback sliding mode control, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **54**(5): 1141–1147.

Swaroop, D., Hedrick, J., Yip, P. and Gerdes, J. (2000). Dynamic surface control for a class of nonlinear systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **45**(10): 1893–1899.