

ESTUDO SOBRE A APROXIMAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES POR MODELOS QUASE-LINEARES-POR-PARTES

ALEXANDRE KOUKI KOMADA*, RODRIGO FONTES SOUTO†, LUIS CARLOS GÓES‡

*Pça. Mal. Eduardo Gomes, nº 50
Instituto Tecnológico da Aeronáutica
São José dos Campos, SP, Brasil

†Av. Brg. Faria Lima
Embraer SA
São José dos Campos, SP, Brasil

‡Pça. Mal. Eduardo Gomes, nº 50
Instituto Tecnológico da Aeronáutica
São José dos Campos, SP, Brasil

Emails: alexandre.komada@gmail.com, rodrigo.souto@embraer.com.br, goes@ita.br

Abstract— This work analyses the approximation of a nonlinear dynamical system by a quasi-piecewise-linear dynamic system. This term is due to the proposal of approximating the nonlinear behavior of the system by weighted linearized systems previously selected. The proposed approach is applied on the pendulum system with a control input and a disturbance. The results are compared with those of the nonlinear model.

Keywords— linearization, nonlinear dynamical systems, quasi-piecewise linearization, hard stop modeling

Resumo— Este trabalho faz a análise da aproximação de um sistema dinâmico não-linear por um sistema dinâmico quasi-linearizado-por-partes. Este termo vem da proposta de se aproximar o comportamento não-linear do sistema pelo comportamento ponderado de diversos sistemas lineares previamente selecionados. A proposta é aplicada sobre o sistema do pêndulo simples com uma entrada de controle e um distúrbio. Os resultados obtidos são comparados com os do modelo não-linear.

Palavras-chave— linearização, sistemas dinâmicos não-lineares, modelos quase-lineares-por-partes, modelagem de batentes

1 Introdução

A simulação de sistemas dinâmicos não-lineares de grande porte pode ser bastante custosa computacionalmente, mesmo com a aplicação de métodos numéricos para sua otimização, tais como aqueles disponíveis em pacotes computacionais como o Matlab: ODE15, ODE15s, ODE45, entre vários outros, cada um tendo suas vantagens e desvantagens sobre diferentes modelos.

Quando o enfoque da otimização da simulação não está no método numérico por trás dos algoritmos, mas sim da maneira como o modelo é estruturado, a linearização do sistema para sua simulação nos entornos dos pontos linearizados mostra-se um proposta interessante. Entretanto, neste caso, a região do espaço de estados onde o modelo linear é válido pode ser muito restrita dependendo do sistema e do ponto de operação escolhido. Por outro lado, o modelo linearizado pode ser bem abrangente para outro ponto. Por este motivo, a aproximação do modelo não-linear pela combinação de diversos modelos linearizados — a *Linearização por Partes* — pode ser vantajosa para alguns casos e pode não apresentar bons resultados para outros. Por exemplo, quando o objetivo da linearização de um modelo por partes não é a otimização da simulação, mas sim o projeto de compensadores por técnicas de controle li-

near, a linearização por partes de sistemas dinâmicos apresenta bons resultados, como analisado em (Pettit and Wellstead, 1995) e (Shamma and Athans, 1990). O foco deste trabalho, no entanto, é uma análise inicial de modelos quasi-lineares-por-partes com relação aos ganhos computacionais que eles podem proporcionar na simulação de sistemas dinâmicos não-lineares.

A referência (Rewieński, 2003) propõe uma forma elegante de computar essa combinação de modelos linearizados por meio da ponderação baseada no vetor de estados do sistema. Neste caso, a aproximação deixa de ser do tipo linear-por-partes e passa a ser, como mencionado por (Rewieński, 2003), *quasi-linear-por-partes*. A aproximação de sistemas dinâmicos não-lineares por sistemas dinâmicos linearizados por partes acaba sendo um caso de uma abordagem quasi-linear-por-partes. Para transformar o modelo quasi-linear-por-partes em um modelo linear por partes, basta ponderar os diversos sistemas linearizados combinados por uma regra do tipo chaveamento, ou seja, atribuir ponderação máxima ao modelo linearizado que está mais próximo do vetor de estados.

Como a metodologia propõe uma aproximação dos sistemas não-lineares pela somatória ponderada de sistemas lineares, a estrutura obtida

ainda é não-linear, pois a função de ponderação é não-linear e dependente do vetor de estados. A referência (Rewieński, 2003) mostra que o método pode reduzir consideravelmente o esforço computacional quando a planta não-linear apresenta um grande número de estados. Os trabalhos em (Rewieński, 2003) e em (Bond, 2010) aplicam com sucesso a abordagem quasi-linear-por-partes em sistemas de grande porte altamente não-lineares.

Deve-se enfatizar a distinção entre os modelos quasi-linearizados-por-partes e os modelos LPV (Linear a Parâmetros Variantes). Enquanto os modelos LPV são, como sua própria nomenclatura sugere, lineares, os modelos quasi-lineares-por-partes são não-lineares. Isso porque os primeiros consistem em uma coleção de modelos lineares indexada por parâmetros *exógenos*, enquanto os segundos são formados por uma soma ponderada de sistemas linearizados cuja função de ponderação depende dos estados do sistema, ou seja, parâmetros *endógenos* (Shamma, 1990).

Este trabalho faz uma análise inicial da aplicação do método utilizando um pêndulo simples de haste rígida com uma perturbação aerodinâmica e uma entrada na forma de um torque no eixo de rotação. O interesse aqui ainda não é analisar o ganho computacional, mas sim a qualidade dos resultados do modelo quasi-linear-por-partes, mesmo porque se trata de um sistema com apenas dois estados, onde os ganhos computacionais da simulação não são tão relevantes.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: a seção 2 mostra as generalizações utilizadas para representação matemática de sistemas dinâmicos não-lineares, bem como sua representação na forma linearizada. Na seção 3, apresenta-se a modelagem do pêndulo simples e sua linearização. A seção 4 mostra a metodologia utilizada para a aproximação do sistema pelo modelo quasi-linear-por-partes. A seção 5 ilustra um exemplo numérico aplicando a proposta no modelo do pêndulo. Por fim, são apresentadas metas futuras e as devidas conclusões sobre a aplicação do método.

Notação: As grandezas vetoriais serão representadas com **negrito** e grandezas escalares e matrizes serão representadas sem negrito. Por exemplo, \mathbf{x} é o vetor de estados e x_1 e x_2 são elementos deste vetor. A matriz identidade de ordem $n_x \times n_x$ é representada por I_{n_x} .

2 Linearização

O modelo dinâmico não-linear será representado da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

onde $\mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entradas, $F : D \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, n_x é o número de estados e n_u é o número de entradas do sistema.

A linearização de (1) em torno de um ponto de operação \mathbf{x}_i e entrada \mathbf{u}_i será obtida pela expansão de $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ por séries de Taylor, desprezando os termos de alta ordem. Isso quer dizer que o modelo linearizado em torno de \mathbf{x}_i e \mathbf{u}_i será denotado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + B_i(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) + F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \quad (2)$$

onde A_i e B_i são as matrizes jacobianas de $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em relação a \mathbf{x} e \mathbf{u} respectivamente, ambas avaliadas em \mathbf{x}_i e \mathbf{u}_i .

Diz-se que o sistema está linearizado em torno de um ponto de operação *estacionário* quando a parcela $F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$ é nula. Este caso implica em derivadas nulas quando \mathbf{x} e \mathbf{u} são avaliadas em \mathbf{x}_i e \mathbf{u}_i , respectivamente. Por outro lado, quando $F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \neq 0$, diz-se que o sistema foi linearizado em torno um ponto de operação *não-estacionário*.

A linearização como apresentada em (2) pode ser facilmente obtida computacionalmente. Por este motivo, ela será utilizada como base dos modelos linearizados apresentados neste trabalho.

3 Modelagem do Pêndulo Simples

O pêndulo clássico foi escolhido como exemplo porque se trata de um sistema dinâmico não-linear que pode ser facilmente linearizado em qualquer ponto de operação do seu domínio. Além disso, trata-se de um sistema relativamente simples, sobre o qual as estratégias de modelagem e simulação propostas são facilmente implementadas. A figura (1) ilustra o sistema em questão. A refe-

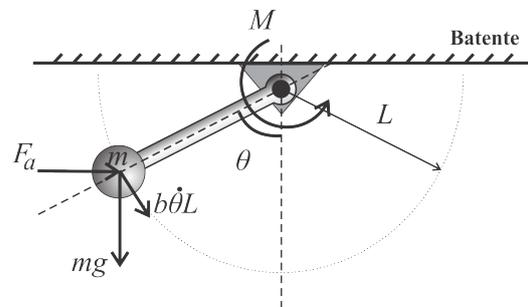


Figura 1: Pêndulo clássico com perturbações.

rência angular do sistema é o eixo vertical passando pelo eixo de rotação. O ângulo θ do pêndulo com relação à referência é positivo para posições angulares à direita da referência e negativo para posições angulares à esquerda da referência. Em $+90^\circ$ e em -90° será inserido o efeito do batente, responsável por um comportamento bastante não linear do sistema nessas regiões. As entradas do sistema são o momento M no eixo de rotação e a força aerodinâmica F_a sempre paralela ao batente, onde M assume valores positivos quando aplicado no sentido anti-horário e F_a assume valores positivos quando aplicada da esquerda para a direita na figura (1).

Aplicando-se a segunda lei de Newton para sistemas rotacionais em relação ao eixo de rotação do pêndulo:

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\theta} &= M + M_{F_a} + M_W + M_{F_b} \\ &= M - F_a L \cos \theta - mgL \sin \theta - bL\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (3)$$

onde M_{F_a} é o momento devido à força aerodinâmica no corpo de massa m , M_W é o momento devido à força peso da massa m e M_{F_b} é momento devido à força de atrito viscoso da massa m com o ar. Isolando $\ddot{\theta}$, tem-se:

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{mL^2} - \frac{F_a}{mL} \cos \theta - \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{b}{mL} \dot{\theta}. \quad (4)$$

Definindo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$ como variáveis de estado, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{M}{mL^2} - \frac{F_a}{mL} \cos x_1 - \frac{g}{L} \sin x_1 - \frac{b}{mL} x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

As matrizes A_i e B_i da equação (2) são, portanto, dadas por:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\bar{F}_a}{mL} \sin x_{1i} - \frac{g}{L} \cos x_{1i} & -\frac{b}{mL} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

onde \bar{F}_a é o valor da entrada F_a em torno da qual o modelo é linearizado e x_{1i} é um elemento de $\mathbf{x}_i = [x_{1i} \ x_{2i}]^T$.

Até aqui, o efeito do batente foi ignorado. Logo, o equacionamento em (5) só é válido para o intervalo $-90^\circ < \theta < 90^\circ$. Para $\theta \leq -90^\circ$ e $\theta \geq 90^\circ$, o efeito do batente foi adicionado ao equacionamento como sendo uma força elástica cuja constante elástica k é bastante alta. O momento devido à força elástica, $M_{F_{el}} = kL \sin(\Delta\theta_{bat})$, é considerado no somatório de momentos na equação (3) multiplicando-o pelo comprimento da haste, ou seja:

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\theta} &= M + M_{F_a} + M_W + M_{F_b} + M_{F_{el}} \\ &= M - F_a L \cos \theta - mgL \sin \theta - bL\dot{\theta} \\ &\quad + kL^2 \sin(\Delta\theta_{bat}), \end{aligned} \quad (8)$$

onde $\Delta\theta_{bat}$ corresponde a pequenas variações de θ em torno dos batentes em $\pm 90^\circ$. Portanto, pode-se considerar $\sin(\Delta\theta_{bat}) \approx \Delta\theta_{bat}$.

Para o caso da inserção do efeito do batente em x_{1i} próximo a 90° , a matriz de estados linearizada passa a ser:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\bar{F}_a}{mL} \sin x_{1i} - \frac{g}{L} \cos x_{1i} + kL^2 & -\frac{b}{mL} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

A matriz B_i não é afetada.

4 Modelos Dinâmicos Quasi-Lineares-por-Partes

A referência (Rewieński, 2003) representa o modelo não-linear de um sistema dinâmico um pouco diferente daquele apresentado em (1):

$$\frac{d}{dt}g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (10)$$

onde $g : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $f : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $B(\mathbf{x})$ tem dimensões $n_x \times n_u$.

A linearização de (10) em torno de \mathbf{x}_i é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g(\mathbf{x}_i) + G_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) &= \\ = f(\mathbf{x}_i) + A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + B(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (11)$$

onde A_i e G_i são matrizes jacobianas de $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$, respectivamente, avaliadas em \mathbf{x} .

No mesmo trabalho, (Rewieński, 2003) propõe a aproximação do modelo não-linear pela seguinte combinação ponderada de modelos lineares:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x})(g(\mathbf{x}_i) + G_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) \right] \\ = \sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}_i) + A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + B(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (12)$$

onde s é o número de modelos linearizados e $w_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ é a função de ponderação que é multiplicada pelo correspondente modelo linearizado em torno de \mathbf{x}_i . Normalizando, tem-se que $\sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x}) = 1$.

Na próxima subseção será usado um dos métodos de cálculo de $w_i(\mathbf{x})$ propostos por (Rewieński, 2003). A escolha dos pontos de linearização também será brevemente discutida nessa seção.

A representação (10) não engloba modelos matemáticos como os do pêndulo, modelado por (5) e (8), pois nesses casos as funções $F(\cdot)$ dependem de \mathbf{x} e \mathbf{u} e não permitem a separação do tipo $f(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\mathbf{u}$, pois tanto \mathbf{x} e \mathbf{u} são argumentos de funções trigonométricas e há multiplicação entre elementos de \mathbf{x} e \mathbf{u} .

Com isso, retomamos à representação matemáticas da equação (1) aplicada ao modelo do pêndulo.

A equação (10) generaliza o lado esquerdo da igualdade considerando que ele é dado por uma função g , em vez de simplesmente derivadas das variáveis de estado como em (1). Acontece que, para a modelagem em (1), $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e, portanto, $G_i = I_{n_x}$ e $g(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i$ para qualquer \mathbf{x}_i . Logo, o lado esquerdo da equação (11) resume-se a $\frac{d}{dt}\mathbf{x}$.

Agora, adaptando a representação quasi-linear-por-partes em (12) para o modelo linearizado representado por (2), e usando o resultado

do parágrafo anterior, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x})\mathbf{x} = \sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x})(A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + B_i(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) + F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)). \quad (13)$$

O vetor \mathbf{x} do lado esquerdo da equação pode ser retirado do somatório, pois não depende de i . Lembrando que $\sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x}) = 1$ para qualquer \mathbf{x} , tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^s w_i(\mathbf{x})(A_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + B_i(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) + F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)). \quad (14)$$

4.1 Seleção de Pontos de Linearização

Uma primeira ideia apresentada por (Rewieński, 2003) para a seleção de pontos de linearização se baseia na distância do estado atual até o ponto linearizado mais próximo selecionado. Se esta distância estiver acima de um valor, então deve-se tomar o estado atual como um novo ponto de linearização. Note que o método exige que haja uma ou mais rodadas prévias de simulação do modelo não-linear. Isso implica que na simulação do modelo quasi-linear-por-partes, o comportamento da entrada deve estar próximo daquele usado nos treinamentos. Esta metodologia é conhecida na literatura como *Trajectory Piecewise-Linear*, pois se baseia em trajetórias previamente conhecidas do vetor de estados para uma entrada típica do sistema.

Outros métodos mais aprimorados para seleção de pontos de linearização são apresentados por (Rewieński, 2003), mas não serão abordados neste trabalho.

Para o sistema do pêndulo, um dado comportamento de M e F_a foi definido ao longo do tempo. Com este comportamento, durante a simulação do modelo não-linear os modelos linearizados são obtidos por meio do seguinte algoritmo:

1. Gerar o modelo linearizado em torno do ponto inicial \mathbf{x}_1 e fazer $i = 1$;
2. Simular o sistema não-linear enquanto

$$\min_{1 \leq j \leq i} \left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|}{\|\mathbf{x}_j\|} \right) < \delta,$$

Para $\delta > 0$

3. Gerar um novo modelo linearizado em torno de $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}$, e fazer $i := i + 1$.

O valor δ é o raio da hipersfera com centro em \mathbf{x}_i dentro da qual o modelo linearizado i é considerado válido.

A referência (Rewieński, 2003) propõe outras formas de selecionar os pontos de linearização baseado na análise de erros. Como consequência, δ

deixa de ter um valor fixo, o que é uma proposta interessante. Isso porque há regiões do espaço de estados onde os modelos linearizados são válidos dentro de uma hipersfera de raio menor e outras onde eles são mais abrangentes. Esta metodologia, no entanto, não será abordada neste artigo.

4.2 Cálculo das Ponderações

Uma vez que os modelos linearizados foram selecionados, a ponderação w_i para cada modelo i é calculada durante a simulação, pois ela depende de \mathbf{x} . A proposta de (Rewieński, 2003) é a seguinte:

1. Para $i = 1, \dots, s$ calcular $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$;
2. Tomar $d^* = \min_{i=1, \dots, s} d_i$;
3. Para $i = 1, \dots, s$ faça $\hat{w}_i = e^{-\beta d_i/d^*}$;
4. Normalizar \hat{w}_i :
 - 1 Calcular $S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s \hat{w}_i$;
 - 2 Para $i = 1, \dots, s$ faça $w_i(\mathbf{x}) = \hat{w}_i(\mathbf{x})/S(\mathbf{x})$.

Esta abordagem considera uma transição suave entre os modelos linearizados à medida que o vetor de estados sai de uma hipersfera onde um modelo é válido para ir à região em outra hipersfera. Essa transição passa a ser mais rápida quanto maior for o valor de β .

5 Resultados

Utilizando $m = 1kg$, $L = 1m$, $b = 1Ns/m$ e $g = 9,81m/s^2$, as equações de estado em (5) ficam com os seguintes valores numéricos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= M - F_a \cos x_1 - 9,81 \sin x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Para o teste do método sobre o sistema do pêndulo foram escolhidos os comportamentos das entradas M e F_a mostrados na figura (2). O comportamento de θ está mostrado no terceiro gráfico da figura. Este comportamento das entradas foi escolhido para primeiro analisar a influência individual de cada entrada na forma de degrau e depois da influência de ambos atuando juntos. Notar que nos arredores de 14,5s, 21,5s, 27,5s e 46,5s há uma leve atuação do batente impedindo que θ fique menor que -90° e maior que $+90^\circ$.

Para a região onde não há o efeito do batente, os algoritmos propostos nas subseções 4.1 e 4.2 foram aplicados no modelo (5). Utilizando $\delta = 0,7854$ - obtido por tentativa e erro - foram extraídos doze modelos linearizados. Os modelos foram obtidos em torno de condições de equilíbrio, ou seja, $\dot{\theta} = 0^\circ/s$, ou $F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = 0$ na equação (2). Para isso, devem ser encontrados os valores de M e F_a que equilibram o sistema em torno do θ desejado. Estes valores compõem o vetor \mathbf{u}_i .

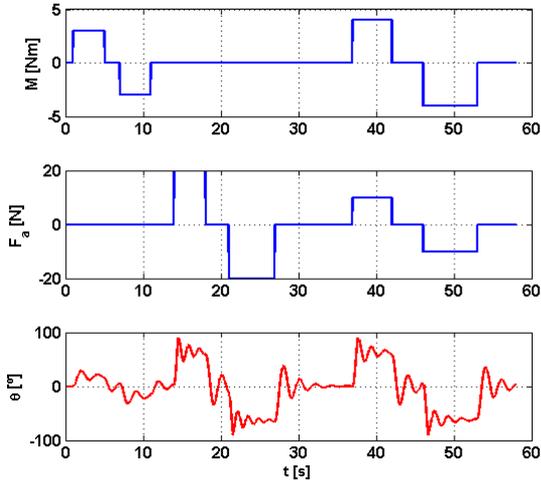


Figura 2: Simulação do modelo não-linear

Utilizando $\beta = 200$ e aplicando o algoritmo da subseção 4.2, obteve-se o resultado da figura (3). Notar que, como o batente não foi considerado, o comportamento do overshoot nas regiões próximas a $\pm 90^\circ$ não foi limitado. A curva mais fina é o comportamento do sistema linearizado em torno de $\theta = 0^\circ$ e $\dot{\theta} = 0^\circ/s$. Ela foi adicionada para mostrar a discrepância entre os comportamentos do modelo real com o modelo linearizado em um único ponto.

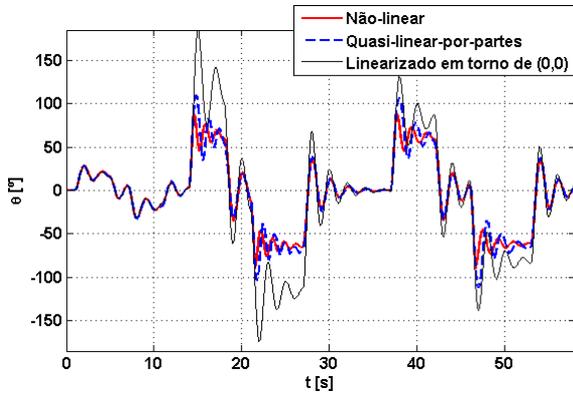


Figura 3: Simulação do modelo quasi-linear-por-partes sem o efeito do batente.

Aos doze modelos linearizados obtidos, serão somados mais quatro para a consideração do batente. Isso por dois motivos:

1. O efeito da mola foi adicionado em $\theta = 93^\circ$ com $\dot{\theta} = 5\text{rad/s} = 286,48^\circ/s$, para que θ não atingisse valores maiores que $+90^\circ$, e em $\theta = -93^\circ$ com $\dot{\theta} = -5\text{rad/s} = -286,48^\circ/s$, para que θ não atingisse valores menores que -90° . Como $\dot{\theta} \neq 0$, o modelo linearizado nestas regiões é não estacionário, ou seja, $F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) \neq 0$ na equação (2). Com essa restrição de velocidade angular para a ponderação desses modelos há uma maior garantia de

que o efeito da mola atue somente quando a massa vá *de encontro* ao batente. Se a linearização fosse feita em torno dos mesmos $\pm 93^\circ$, mas com $\dot{\theta} = 0^\circ/s$, a força mola atuaria em momentos indesejáveis. Por exemplo: para $\mathbf{x}_a = [90^\circ \ 10^\circ/s]^T$ espera-se que a mola atue empurrando a massa, fazendo com que θ diminua. Já para $\mathbf{x}_b = [90^\circ \ -10^\circ/s]^T$ não se espera o mesmo comportamento, pois a massa está se afastando do batente, sendo que somente a força da gravidade e as entradas M e F_a devem atuar sobre ela. Se o batente fosse linearizado em torno de $\mathbf{x}_0 = [93^\circ \ 0^\circ/s]^T$, o efeito da mola surgiria tanto no estado \mathbf{x}_a quanto no estado \mathbf{x}_b .

2. Para que a força elástica não tenha efeito nas regiões distantes de $\theta = \pm 90^\circ$ foram adicionados mais dois modelos em $\pm 80^\circ$. Isso garante que a ponderação seja baixa para o efeito do batente quando a massa m sai das proximidades de $\pm 90^\circ$. Com isso, mais dois modelos foram adicionados, totalizando 16 modelos.

Ainda utilizando $\beta = 200$, agora com $k = 10^4\text{N/m}$, obteve-se os resultados da figura (4). As diferenças entre os modelos não-linear e quasi-linear-por-partes ficaram mais próximos na região do batente, mas ficaram distorcidos quando saem dessa região e retornam para as proximidades de $\theta = 0^\circ$. A figura (5) mostra o zoom entre 14s e 24s.

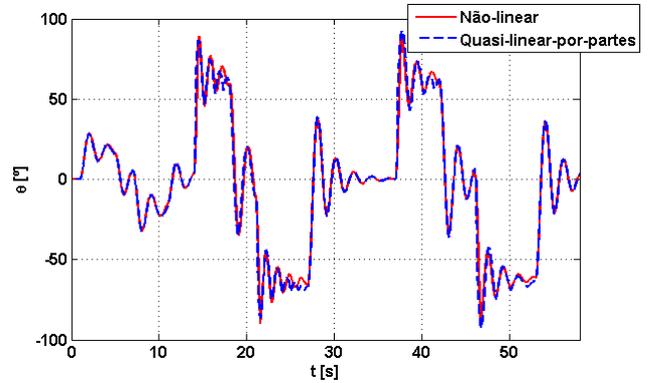


Figura 4: Simulação do modelo quasi-linear-por-partes com o efeito do batente.

Para entender este comportamento, foi feita uma aproximação no gráfico de θ entre 14s e 24s. Junto com ele, foram plotadas as ponderações relacionadas aos modelos linearizados em torno de $\pm 93^\circ$ e $\pm 80^\circ$ na figura (6).

A figura (6) mostra que em torno de 14,1s o modelo do batente (correspondente a w_{13} , onde o índice 13 corresponde ao modelo linearizado em $\theta = 93^\circ$) assume uma ponderação baixa (da ordem de 10^{-4}), mas suficiente para barrar o aumento de θ devido ao grande valor da constante elástica. Logo depois, a ponderação do modelo linearizado

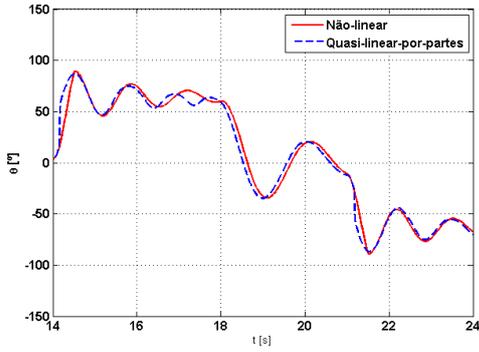


Figura 5: Simulação do modelo quasi-linear-por-partes com o efeito do batente - zoom entre 14s e 24s.

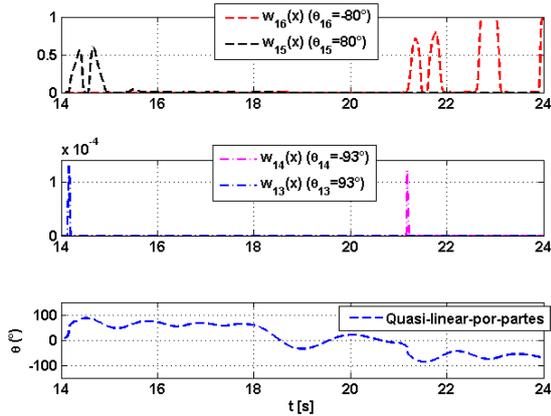


Figura 6: Zoom entre 14s e 24s da simulação do modelo quasi-linear-por-partes e os pesos de dos modelos linearizados em $\pm 93^\circ$ e $\pm 80^\circ$.

em torno de 80° assume valores que oscilam em torno de 0,5 devido ao comportamento oscilatório neste intervalo. As ponderações w_{13} , w_{14} , w_{15} e w_{16} se mantêm praticamente nulas até aproximadamente 21s, quando a ponderação do modelo de $\theta = -93^\circ$ assume um valor da ordem de $1, 1 \cdot 10^{-4}$, devido à aplicação contrária de F_a . Logo depois, a ponderação de $\theta = -80^\circ$ assume valores que oscilam entre 0 e 1.

6 Conclusões

A metodologia proposta apresentou bons resultados para as regiões bem comportadas do modelo do pêndulo. A tentativa de aplicação do método na região do batente obteve resultados razoáveis para o caso analisado, sendo que necessita de uma maior investigação para casos diferentes de perturbações.

A não-linearidade causada pelo batente foi substituída pelo modelo massa-mola linear em $\pm 93^\circ$. Houve a necessidade de que esse modelo linear fosse não estacionário, para considerar a velocidade não nula com que a massa se aproxima dessas posições. Os resultados não ficaram tão

próximos do modelo não-linear quanto aqueles da região mais comportada do espaço de estados, ou seja, aquela não afetada pelo efeito da força da mola. Contudo, observou-se que a ponderação de modelos lineares do batente foi efetuada como o esperado, dando indícios de que a metodologia pode aproximar comportamentos de forte não-linearidade como este. Uma proposta de trabalho futuro é a de investigar se a extração de mais modelos lineares do batente, com diferentes velocidades de aproximação, melhoraria os resultados. De modo geral, essa abordagem sugere que regiões do espaço de estados com maior não-linearidade necessitam de mais modelos lineares para ponderação.

Este trabalho buscou a generalização do trabalho de (Rewieński, 2003). Neste processo, ele acabou evidenciando diversas dificuldades geradas pelas particularidades do modelo em si, e pelos diferentes efeitos causados pelas não-linearidades. Aqui, foram aplicadas as propostas mais simples de seleção de pontos de linearização daquelas apresentadas em (Rewieński, 2003). Uma sugestão de trabalho futuro seria analisar a viabilidade da aplicação de suas técnicas mais aprimoradas baseadas em análise de erros para seleção de pontos de linearização.

Agradecimentos

Os autores agradecem o Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia que através do Instituto de Estruturas Inteligentes incentivou este trabalho.

Referências

- Bond, B. N. (2010). *Stability-Preserving Model Reduction for Linear and Nonlinear Systems Arising in Analog Circuit Applications*, Tese de doutorado, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology.
- Pettit, N. B. O. L. and Wellstead, P. E. (1995). Analyzing piecewise linear dynamical systems, *IEEE 33rd CDC*.
- Rewieński, M. J. (2003). *A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems*, Tese de doutorado, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Massachusetts Institute of Technology.
- Shamma, J. S. (1990). An overview of lpv systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Shamma, J. S. and Athans, M. (1990). Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants, *IEEE Transactions on Automatic Control*.