

# CONTROLE COM ADAPTAÇÃO EM MODO DUAL UTILIZANDO UMA REDE DE GAUSSIANAS

ODAILSON CAVALCANTE DE OLIVEIRA\*, ALDAYR DANTAS DE ARAÚJO†, ALLAN DE MEDEIROS MARTINS‡

\*Endereço:

IFRN- Campus João Câmara. BR 406, Km 73, nº 3500, CEP 59550000  
João Câmara, RN, Brasil

†Endereço:

UFRN- Departamento de Engenharia Elétrica - Centro de Tecnologia - Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59072970  
Natal, RN, Brasil

‡Endereço:

UFRN- Departamento de Engenharia Elétrica - Centro de Tecnologia - Campus Universitário Lagoa Nova, CEP 59072970  
Natal, RN, Brasil

Emails: odailson.cavalcante@ifrn.edu.br, aldayr@dca.ufrn.br, allan@dee.ufrn.br

**Abstract**— In this paper, a RBF network with Gaussians is adapted through a combination of switching and integral laws. The idea is to take the best features of each method. The hyperbolic tangent is used instead of signal function what reduces the chattering phenomenon. A hyperbolic secant is used to intercalate the methodologies, yielding a dual mode that results on zero error in steady state and a smooth control signal with a significant chattering reduction or even its elimination. The process is in real time, and the error between the reference model and system outputs is the variable that is controlled. This strategy needs only measures of inputs and outputs and no states measurements. Knowledge about parameters and disturbances is unnecessary too. It is presented a Lyapunov proof for dual mode and simulations that show the good performance of RBF controller for unmodeled dynamics and disturbances.

**Keywords**— Adaptive Control, Variable Structure System, Dual Mode, Gaussian.

**Resumo**— Neste artigo é apresentada uma rede de gaussianas aplicada no controle de um sistema não linear e adaptada em modo dual. A ideia é aplicar as leis chaveadas do controle por estrutura variável e as leis integrais do controle adaptativo aproveitando as suas boas propriedades no transitório, em regime permanente e robustez. Para reduzir o chattering presente no sinal de controle, a função sinal é substituída pela função tangente hiperbólica. A função secante hiperbólica é usada para intercalar os dois métodos de adaptação. O processo é feito em tempo real e o erro entre o modelo de referência e a planta é levado a zero. Esta estratégia é aplicada a plantas com medições apenas dos sinais de controle e de saída. Não é necessário conhecimentos sobre o comportamento das perturbações nas medições ou das variações nos parâmetros. Serão apresentadas a prova de estabilidade usando a teoria de Lyapunov e simulações para os casos com dinâmica não-modelada, variações paramétricas e perturbações.

**Palavras-chave**— Controle Adaptativo, Sistema com Estrutura Variável, Modo Dual, Gaussiana.

## 1 Introdução

A falta de conhecimento em um sistema não linear representa um grande desafio para o projetista de controle. Mesmo que se tenha conhecimento dos parâmetros de um sistema, é provável que esses mudem durante o tempo. Estas características fazem as estratégias convencionais bastante restritivas. Uma das alternativas, é o controle por estrutura variável, que apresenta muitas vantagens como rápido transitório, insensibilidade às variações paramétricas e rejeição das perturbações. No entanto, existe o *chattering*, que ocorre quando o sistema atinge a superfície de deslizamento, causando oscilações de altíssima frequência no sinal de controle. Isso torna difícil a sua implementação por causa das limitações físicas dos equipamentos (Young et al., 1999; Nouri et al., 1993; Hsu, 1990).

Mas existem grandes avanços nas pesquisas realizadas para eliminar ou reduzir as restrições impostas pelo controle por estrutura variável. Uma das soluções é combinar o controle adaptativo por estrutura variável com outras estratégias, por exemplo, o que foi feito por Cunha et al. (2005) e Hsu e Real (1997). Pode-se mencionar as redes RBF (*Radial Basis Functions*) combinada ao controle por modos deslizantes (Guo et al., 2006; Frikha et al., 2010; Hsu, 2011; Huang e Chiou, 2006; Zhihong et al., 1995; Liu e Zhang, 2008; Jinzhu e Hongtian, 2010). A rede RBF tem a capacidade inerente de aproximar qualquer função não linear contínua (Chen et al., 1995; Park e Sandberg, 1991). O controle com redes RBF mostra-se globalmente estável para uma classe de sistemas com dinâmicas não lineares desconhecidas (Sanner e Slotine, 1992).

Neste trabalho será mostrada uma estratégia que combina a estrutura variável e as leis integrais do controle adaptativo na adaptação dos pesos de uma rede RBF. Será mostrada a prova de estabilidade através da teoria de Lyapunov e simulações que mostram o desempenho da rede RBF adaptada em modo dual.

## 2 Formulação do Problema

Neste trabalho, a rede RBF foi usada de modo similar ao aplicado por Oliveira et al. (2011) (Fig 1), onde o controlador é uma rede RBF que produzirá o sinal de controle  $u$ . A saída  $y$  é comparada à saída  $y_m$ , produzindo o sinal de erro de saída  $e_0$ , que é utilizado para adaptar os pesos  $\mathbf{w}$ . A equação de saída da rede RBF é dada pela expressão  $\sum_i^N w_i g_i = \mathbf{w}^T \mathbf{g}$ , onde  $\mathbf{w}^T = [w_1 \dots w_N]$  ( $T$  é o operador transposto) é um vetor com  $N$ -pesos, e  $\mathbf{g}^T = [g_1 \dots g_N]$  é um vetor com todas as  $N$  respostas da camada oculta da rede RBF.

Cada nó  $i$  é uma função gaussiana  $g_i = e^{-\frac{\|\omega - \mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma_i^2}}$ , onde  $\omega^T = [y \ \mathbf{v}_u^T \ \mathbf{v}_y^T \ r] \in \mathcal{R}^{2n}$  ( $n$  é a ordem do sistema) é o vetor de entrada da rede RBF, ou o vetor regressor, formado pelos sinais filtrados da saída e entrada  $\mathbf{v}_u$  e  $\mathbf{v}_y \in \mathcal{R}^{n-1}$ , a saída da planta  $y$  e o sinal de referência  $r$ . O vetor  $\mathbf{c}_i \in \mathcal{R}^{2n}$  é o vetor de coordenadas de cada nó  $i$  no espaço de entrada, e  $\sigma_i$  é a largura de cada gaussiana.

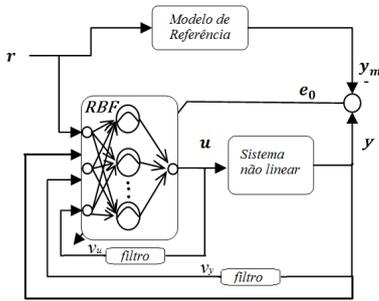


Figura 1: Estrutura de Controle

### 2.1 Leis de Adaptação

O vetor de pesos  $\mathbf{w}$  tem suas componentes ajustadas de acordo com a combinação de métodos apresentados em (1)-(2), onde  $w_{si}$  é responsável pelo transitório rápido e  $w_{ai}$  é responsável pelo regime permanente (2). As funções  $\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i)$  e  $\phi(\lambda_{2i}e_0g_i)$  são definidas em (3)-(6), sendo  $\lambda_{1i}$  e  $\lambda_{2i}$  parâmetros que ajustam essas funções. Os parâmetros  $\gamma$  e  $\bar{w}_i$  são o ganho adaptativo e a amplitude da função  $\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i)$ , respectivamente.

$$w_i = w_{si} + \phi(\lambda_{2i}e_0g_i)w_{ai} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_{si} &= -\bar{w}_i\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i) \\ \dot{w}_{ai} &= -\phi(\lambda_{2i}e_0g_i)\gamma e_0g_i \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i) = \begin{cases} \tanh(e_0g_i), & \text{Se } |\lambda_{1i}e_0g_i| \leq k \\ \bar{c}\text{sgn}(e_0g_i), & \text{Se } |\lambda_{1i}e_0g_i| > k \\ \text{em que } \bar{c} = |\tanh(k)| \text{ e } k \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} -1 & \text{Se } a < 0, a \in \mathcal{R} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

$$\tanh(e_0g_i) = \frac{1 - e^{-(2\lambda_{1i}e_0g_i)}}{1 + e^{-(2\lambda_{1i}e_0g_i)}} \quad (5)$$

$$\phi(\lambda_{2i}e_0g_i) = \frac{2}{e^{(\lambda_{2i}e_0g_i)} + e^{(-\lambda_{2i}e_0g_i)}} \quad (6)$$

No início do processo de adaptação, todas as gaussianas têm o mesmo  $\sigma_i$  e cada componente de  $\mathbf{c}_i$  recebe valores aleatórios entre o mínimo e o máximo de  $r$ . Os pesos  $w_i$  são ajustados para reduzir  $e_0$ . Durante o transitório, a componente  $w_{si}$ , por meio de  $w_{si}$ , tem as propriedades do controle adaptativo por estrutura variável o que oferece uma rápida resposta. Em regime permanente, por meio de  $w_{ai}$ , tem-se uma convergência suave do erro de saída  $e_0$ .

No controle por estrutura variável é utilizada a função sinal  $\text{sgn}(a)$  como definida em (4). A função tangente hiperbólica  $\tanh(\lambda_{1i}e_0g_i)$  é parte da função  $\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i)$  e devido sua continuidade, quando  $e_0 = 0$ , contribui pela redução do *chattering*. A função secante hiperbólica  $\phi(\lambda_{2i}e_0g_i)$  intercala os métodos de adaptação. Para valores de  $e_0$  elevados,  $\phi(\lambda_{2i}e_0g_i)$  tende a zero, o que faz  $\phi(\lambda_{2i}e_0g_i)w_{ai}$  quase nulo, e  $w_{si}$  assume dois valores  $+\bar{w}_i\bar{c}$  e  $-\bar{w}_i\bar{c}$ , o que causa o efeito relé em  $w_{si}$ , fazendo a rede RBF se comportar como um controlador por estrutura variável. Para valores de  $e_0$  pequenos,  $w_{ai}$  influencia com a ação integral. Os valores de  $e_0$  e  $w_{si}$  assumem valores proporcionais à  $e_0$ , porque  $\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i)$  tende à  $\lambda_{1i}e_0g_i$ , que é uma região linear. Para determinar o momento de transição entre os métodos de adaptação, escolhe-se um valor  $k$  que separa as regiões de operação das leis de controle conforme indicado na Fig. 2. Quando  $|\lambda_{1i}e_0g_i| > k$ , tem-se o efeito do controle por estrutura variável, e para  $|\lambda_{1i}e_0g_i| \leq k$ , tem-se basicamente as leis integrais.

O ajuste dos parâmetros  $\lambda_{1i}$  e  $\lambda_{2i}$  pode ser feito analisando a expressão (3) na transição do método de adaptação. Assim, na transição de método,  $\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i) = \bar{c}\text{sgn}(e_0g_i)$ , tem-se  $|\lambda_{1i}e_0g_i| = k$ . Pode-se escolher  $\lambda_{1i} = \frac{10k}{g_i}$  ou múltiplos (Para simulações deve-se estabelecer um valor mínimo para o denominador), e faz-se  $\lambda_{2i} = \lambda_{1i}/10$ . Tal escolha permite a simplificação da sintonia dos parâmetros do controlador.

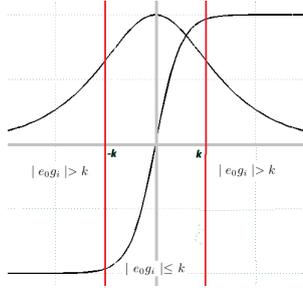


Figura 2: Regiões de Controle

## 2.2 Desenvolvimento do Problema

Considere o sistema não linear (SISO):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p (f(\mathbf{x}) + u + d_i) \\ y &= \mathbf{h}_p^T \mathbf{x}_p \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $\mathbf{x}_p \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{A}_p \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b}_p \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{h}_p \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ,  $f(\mathbf{x})$  é o termo não linear do sistema,  $u \in \mathcal{R}$  é o sinal de controle,  $y \in \mathcal{R}$  é a saída e  $d_i$  é a perturbação de entrada. A função de transferência do termo linear é dada por  $W(s) = k_p \frac{N(s)}{D(s)} = \mathbf{h}_p^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}_p$ , em que  $N(s)$  e  $D(s)$  são mônimos e  $k_p$  é o ganho de alta frequência (a variável  $s$  é a variável complexa no domínio da frequência e também denota o operador  $\frac{d}{dt}$  no domínio do tempo). O modelo de referência é dado por  $y_m = M(s)r$ , sendo que  $y_m$  e  $r$  são a saída do modelo de referência e o sinal de referência de entrada contínuo por partes, respectivamente. A função de transferência do modelo é  $M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}$ , em que  $k_m$  é o ganho de alta frequência,  $D_m(s)$  é Hurwitz e  $N_m(s)$ ,  $D_m(s)$  são mônimos. As seguintes hipóteses são feitas (Sastry e Bodson, 1989). Hipóteses:

1. Somente as medições dos sinais de entrada e de saída da planta estão disponíveis;
2.  $k_m > 0$  e  $k_p > 0$ ;
3. A planta é controlável e observável com  $\text{grau}[N(s)] = n - 1$  e  $\text{grau}[D(s)] = n$ , sendo  $m$  e  $n$  conhecidos;
4. O grau relativo ( $n^* = 1$ ) do modelo e da planta é o mesmo, isto é, o modelo é ERP;
5.  $N(s)$  é Hurwitz, ou  $W(s)$  é de fase mínima.

Os filtros são dados por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_y &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}_y + \mathbf{b}_f y \\ \dot{\mathbf{v}}_u &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}_u + \mathbf{b}_f u \end{aligned} \quad (8)$$

em que  $\mathbf{v}_y$ ,  $\mathbf{v}_u$  e  $\mathbf{b}_f \in \mathcal{R}^{n-1}$ . O par  $(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{b}_f)$  é controlável e  $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  é uma matriz estável, de modo que  $N_m(s)$  seja um fator de  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})$ .

Assim, o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \dot{\mathbf{v}}_u \\ \dot{\mathbf{v}}_y \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda} & 0 \\ \mathbf{b}_f \mathbf{h}_p^T & 0 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \\ &\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_p \\ \mathbf{b}_f \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} (f(\mathbf{x}) + u + d_i) \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}_p^T & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

O sistema pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} (f(\mathbf{x}) + u + d_i) \\ y &= \mathbf{h}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (10)$$

Usando (10), adiciona-se e subtrai-se os termos  $\mathbf{b}u^*$ ,  $\mathbf{b}\mathbf{l}^T \mathbf{x}$  e  $\mathbf{b}r$ , em que o termo  $u^* \in \mathcal{R}$  é o sinal de controle correto capaz de fazer o sistema se comportar como o modelo de referência e  $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^{3n-2}$  é um vetor de ganhos que aloca os polos do sistema (10) para as posições desejadas. Arranja-se os termos e multiplica-se por  $\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$  conforme abaixo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}(f(\mathbf{x}) + u^* + d_i + \\ &+ \mathbf{l}^T \mathbf{x} - r) \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} + \mathbf{b}(u - u^*) + \mathbf{b}r \end{aligned}$$

Agrupando os termos em  $\mathbf{x}$  e dado que  $u^* = \mathbf{w}^{*T} \mathbf{g}$ ,  $u = \mathbf{w}^T \mathbf{g}$  e  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^*$ , segue-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \left[ \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}^T + (f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^{*T} \mathbf{g} + d_i + \right. \\ &\left. + \mathbf{l}^T \mathbf{x} - r) \frac{\mathbf{b}\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{x}\|^2} \right] \mathbf{x} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} + \mathbf{b}r \end{aligned}$$

Define-se uma nova matriz  $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}^T + (f(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^{*T} \mathbf{g} + d_i + \mathbf{l}^T \mathbf{x} - r) \frac{\mathbf{b}\mathbf{x}^T}{\|\mathbf{x}\|^2}$ , em que,  $\mathbf{w}^{*T} \mathbf{g} = -f(\mathbf{x}) - d_i - \mathbf{l}^T \mathbf{x} + r$ , então  $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{l}^T$ . Assim, o sistema pode ser descrito como em (11), sendo que  $\epsilon$  é o erro de aproximação da rede RBF.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} + \mathbf{b}r - \mathbf{b}\epsilon \\ y &= \mathbf{h}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (11)$$

O modelo de referência é dado conforme (12)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_m &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_m + \mathbf{b}r \\ y_m &= \mathbf{h}^T \mathbf{x}_m \end{aligned} \quad (12)$$

em que  $\mathbf{x}_m \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ , e  $y_m \in \mathcal{R}$  é a saída.

Definindo-se a equação de erro  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_m$ , diferenciando-a e substituindo  $\dot{\mathbf{x}}$  (11) e  $\dot{\mathbf{x}}_m$  (12), tem-se a expressão  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \mathbf{e} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} - \mathbf{b}\epsilon$ .

O vetor  $\mathbf{w}$  é ajustado em modo dual e para a análise ele é separado em dois termos. Assim,  $\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{g} = \sum_i^N (\tilde{w}_s + \phi(\lambda_2 e_{0g_i}) \tilde{w}_{ai}) g_i = \tilde{\mathbf{w}}_s^T \mathbf{g} + \tilde{\mathbf{w}}_a^T \mathbf{S} \mathbf{g}$ , em que  $\mathbf{w}_s^T = [w_{s1} \dots w_{sN}]$  e  $\mathbf{w}_a^T = [w_{a1} \dots w_{aN}]$  e  $\mathbf{S} \in \mathcal{R}^{N \times N}$  é uma matriz diagonal das funções  $\phi$ , tal que  $\mathbf{S}_{ixi} = \phi(\lambda_{2i} e_{0g_i})$ . Portanto, o erro pode ser descrito pela equação (13).

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \mathbf{e} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_s^T \mathbf{g} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_a^T \mathbf{S} \mathbf{g} - \mathbf{b}\epsilon \quad (13)$$

### 2.3 Análise de Estabilidade da Rede RBF em Modo Dual ( $n^* = 1$ )

**Lema 1 (Barbalat)** *Se uma função diferenciável  $h(t)$  tem um limite finito quando  $t \rightarrow \infty$ , e se  $\dot{h}(t)$  é uniformemente contínuo, então  $\dot{h}(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Lema 2 (Kalman-Yakubovich-Lefschetz)** *Dados os vetores  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{b}$ , uma matriz assintoticamente estável  $\mathbf{A}_c$ , tal que  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{b})$  seja controlável e  $\mathbf{h}^T(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{b}$  estritamente real positiva, existe  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  e  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$  que satisfaz  $\mathbf{A}_c^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_c = -2\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{h}$ .*

**Teorema 3** *Considerando as hipóteses 1-5, as expressões (13), (1) e (2), a trajetória do sistema converge para um conjunto residual  $D_R = \left\{ (\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}_a) \mid V \leq \frac{C_d^2 \bar{W}^2 N}{2\gamma\zeta\phi_{max}^2} \right\}$*

**Prova:** Definindo a função candidata a Lyapunov como  $V = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e} + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_a^T\tilde{\mathbf{w}}_a}{2\gamma}$ , em que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$  e  $\gamma > 0$ . Então, derivando  $V$  e usando o Lema 2, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_s^T\mathbf{g} + \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_a^T\mathbf{S}\mathbf{g} \\ & -\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\epsilon + \frac{\tilde{\mathbf{w}}_a^T\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_a}{\gamma} \end{aligned} \quad (14)$$

Dado que  $e_0 = \mathbf{h}^T\mathbf{e}$ , tem-se  $\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{b} = e_0$ . Assim, substituindo a expressão  $\dot{w}_{ai} = w_{ai} = -\phi(\lambda_{1i}e_0g_i)\gamma e_0g_i$  e  $w_{si} = -\bar{w}_i\phi(\lambda_{1i}e_0g_i)$  de (2) e arrumando os termos em (14), tem-se

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} - \sum_i^N (\bar{w}_i\phi(\lambda_{1i}e_0g_i) + w_{si}^*)e_0g_i - e_0\epsilon \quad (15)$$

**Caso I** ( $|\lambda_{1i}e_0g_i| > k$ ): tem-se que  $\phi(\lambda_{1i}e_0g_i) = \bar{c}\text{sgn}(e_0g_i)$  (1), então (15) pode ser reescrita como

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} + \sum_i^N (-\bar{w}_i\bar{c}\text{sgn}(e_0g_i) - w_{si}^*)e_0g_i - e_0\epsilon$$

$$\dot{V} \leq -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} - \sum_i^N (\bar{w}_i\bar{c} - |w_{si}^*|)|e_0g_i| + |e_0|\epsilon$$

Para  $\dot{V} \leq 0$ ,  $|\epsilon| \leq \sum_i^N (\bar{w}_i\bar{c} - |w_{si}^*|)g_i$ . Fazendo  $\bar{w}_i\bar{c} > |w_{si}^*|$ , definindo  $\Delta w = \max_i \{\bar{w}_i\bar{c} - |w_{si}^*|\}$ ,  $\|\mathbf{g}\|_1 = \sum_i^N |g_i|$ , então,  $|\epsilon| \leq \Delta w\|\mathbf{g}\|_1$ . Fazendo  $g_{max} = \max_i \{g_i\}$  ( $0 \leq g_{max} \leq 1$ ), conclui-se que  $|\epsilon| \leq \Delta w g_{max} N$ .

**Caso II** ( $|\lambda_{1i}e_0g_i| \leq k$ ): usando a relação  $e^{-a} = \cosh(a) - \sinh(a)$ . Assim,  $\frac{e^{-a}}{\cosh(a)} = 1 - \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}$ , dado que  $\varphi(a) = \tanh(a) = \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}$  e  $\phi(a) = \text{sech}(a) = \frac{1}{\cosh(a)}$ , chega-se a  $\varphi(\lambda_{1i}e_0g_i) = 1 - \phi(\lambda_{1i}e_0g_i)e^{-\lambda_{1i}e_0g_i}$ , substituindo em (15), segue-se

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} + \sum_i^N e_0g_i(-\bar{w}_i - w_{si}^* + \\ & + \bar{w}_i\phi(\lambda_{1i}e_0g_i)e^{-\lambda_{1i}e_0g_i}) - e_0\epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} + \sum_i^N |e_0g_i|(\bar{w}_i + |w_{si}^*| + \\ & \bar{w}_i\phi(\lambda_{1i}e_0g_i)e^{-\lambda_{1i}e_0g_i}) + |e_0|\epsilon \end{aligned} \quad (16)$$

Faz-se  $|\epsilon| = \sum_i^N (\bar{w}_i\bar{c} - |w_{si}^*|)g_i$ , multiplicando o termo da soma por  $\frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{1i}}$  e fazendo  $|\lambda_{1i}e_0g_i| = k$ , em que  $k$  é o limite da região de transição entre os métodos de adaptação (Fig. 2), tem-se  $\dot{V} \leq -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} + \sum_i^N \bar{w}_i(1 + \bar{c} + \phi(k)e^{-k})\frac{k}{\lambda_{1i}}$

Para  $\bar{W} = \max_i \{\bar{w}_i\}$ ,  $\bar{\lambda} = \min_i \{\lambda_{1i}\}$  e  $C_d = (1 + \bar{c} + \phi(k)e^{-k})$ , e usando a desigualdade de Rayleigh ( $-\lambda_{\max}(\mathbf{Q})\|\mathbf{e}\|^2 \leq -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\|\mathbf{e}\|^2$ ), em que,  $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$  e  $\lambda_{\max}(\mathbf{Q})$  são os autovalores mínimo e máximo de  $\mathbf{Q}$ , respectivamente, tem-se

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\|\mathbf{e}\|^2 + \frac{kNC_d\bar{W}}{\bar{\lambda}} \quad (17)$$

Para  $\dot{V} \leq 0$ , conclui-se que  $\|\mathbf{e}\| \geq \sqrt{\frac{kNC_d\bar{W}}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\bar{\lambda}}}$

Considerando a equação (13), e derivando  $\dot{\mathbf{e}}$ , segue-se

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{b}(\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_s^T\mathbf{g} + \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_s^T\dot{\mathbf{g}} + \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_a^T\mathbf{S}\mathbf{g} + \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_a^T\dot{\mathbf{S}}\mathbf{g} + \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_a^T\mathbf{S}\dot{\mathbf{g}} - \dot{\epsilon})$$

Todas as variáveis  $\dot{\mathbf{e}}$  são uniformemente limitadas, então  $\dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{L}_\infty$ , e  $\mathbf{e}$  é limitado inferiormente, usando o Lema 1, implica em  $\dot{\mathbf{e}} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Então (13) é reescrito como  $\mathbf{A}_c\mathbf{e} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_s^T\mathbf{g} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_a^T\mathbf{S}\mathbf{g} - \mathbf{b}\epsilon = 0$ . Isolando o termo com  $\tilde{\mathbf{w}}_a$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\tilde{\mathbf{w}}_a^T\mathbf{S}\mathbf{g} = & -\mathbf{A}_c\mathbf{e} + \mathbf{b}\sum_i^N (\bar{w}_i - w_{si}^* + \\ & + \bar{w}_i\phi(\lambda_{1i}e_0g_i)e^{-\lambda_{1i}e_0g_i})g_i + \mathbf{b}\epsilon \end{aligned}$$

Substituindo todos os termos pelas suas normas e fazendo  $|\epsilon| = \sum_i^N (\bar{w}_i\bar{c} - |w_{si}^*|)g_i$ . Procedendo como anteriormente, para  $\bar{W} = \max_i \{\bar{w}_i\}$ , e  $C_d = (1 + \bar{c} + \phi(k)e^{-k})$ , segue-se

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_a\| \leq \frac{\|\mathbf{A}_c\|\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{S}\|\|\mathbf{g}\|\|\mathbf{b}\|} + \frac{C_d\bar{W}}{\|\mathbf{S}\|\|\mathbf{g}\|} \sum_i^N g_i$$

Fazendo  $\|\mathbf{S}\| = \lambda_{\max}(\mathbf{S}) = \phi_{max}$ ,  $\sum_i^N g_i \leq g_{max}N$ ,  $\|\mathbf{g}\| \leq g_{max}\sqrt{N}$  e  $c_1 = \frac{\|\mathbf{A}_c\|}{\|\mathbf{b}\|}$ , onde  $\lambda_{\max}(\mathbf{S})$  denota o máximo autovalor de  $\mathbf{S}$ ,  $g_{max} = \max_i \{g_i\}$  e  $\frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$ . Fazendo-se  $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\frac{kNC_d\bar{W}}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\bar{\lambda}}}$ , tem-se

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_a\| \leq \frac{c_1\sqrt{\frac{kC_d\bar{W}}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\bar{\lambda}}}}{\phi_{max}g_{max}} + \frac{C_d\bar{W}\sqrt{N}}{\phi_{max}} \quad (18)$$

Na expressão (17), adiciona-se e subtrai-se  $\frac{\|\tilde{\mathbf{w}}_a\|^2}{2\gamma}$ , e multiplicando  $\frac{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})}$ , escreve-se  $\dot{V}$  como

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{2\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\lambda_{\max}(\mathbf{P})\|\mathbf{e}\|^2}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P})} - \frac{\|\tilde{\mathbf{w}}_a\|^2}{2\gamma} + \\ & + \frac{\|\tilde{\mathbf{w}}_a\|^2}{2\gamma} + \frac{kNC_d\bar{W}}{\bar{\lambda}} \end{aligned}$$

Fazendo  $\zeta = \min \left\{ \frac{2\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}, 1 \right\}$  e usando (18), para  $\bar{\lambda}$  e  $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$  tão grande quanto se deseja, tem-se  $\|\tilde{\mathbf{w}}_a\| = \frac{C_d \bar{W} \sqrt{N}}{\phi_{max}}$ , escreve-se  $\dot{V} \leq -\zeta V + \frac{C_d^2 \bar{W}^2 N}{2\gamma \phi_{max}^2}$ . Para  $\dot{V} \leq 0$ , temos  $V \geq \frac{C_d^2 \bar{W}^2 N}{2\gamma \zeta \phi_{max}^2}$ . Portanto,  $\|e\|$  e  $\|\mathbf{w}_a\|$  convergem assintoticamente para o conjunto residual  $D_R = \left\{ (e, \tilde{\mathbf{w}}_a) | V \leq \frac{C_d^2 \bar{W}^2 N}{2\gamma \zeta \phi_{max}^2} \right\}$ , completando-se a prova.  $\square$

## 2.4 Simulações

Os resultados foram obtidos através das simulações do sistema  $W(s) = \frac{s + a_z}{(s + a_p)^2}$  e o modelo  $M(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$ , sendo  $a_p = 1$  e  $a_z = 2$ , e a parte não linear  $f(\mathbf{x}) = x_2^2 e^{-x_1^2}$ ,  $x_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = 0$ . A dinâmica não modelada é dada por  $D(s) = \frac{299}{s^2 + 30s + 299}$ . Os filtros são definidos como  $v_u(s) = \frac{2}{s+2}u$  e  $v_y(s) = \frac{2}{s+2}y$ . Foi usado o método de Euler com passo de integração  $h = 10^{-5}$ . A rede RBF foi projetada com  $N = 50$ ,  $\sigma = 1$  e  $w_i(0) = 0$  os outros parâmetros estão na Fig. 3:

Rede RBF em Modo Dual*				
$\gamma$	$\frac{\bar{w}_i}{\bar{c}}$	$\frac{\lambda_{1i}}{g_i}$	$\frac{\lambda_{2i}}{\lambda_{1i}/100}$	$k$
20	$\frac{0.4}{\bar{c}}$	$\frac{10k}{g_i}$	$\lambda_{1i}/100$	0.05
Perturb. e Var. de Parâmetros:				
$a_z = 2 + 0.5\text{sen}(6t)$	$a_p = 1 + 0.5\text{sen}(6t)$	$d_o = 0.1\text{sen}(20t)$		
20	$\frac{0.4}{\bar{c}}$	$\frac{50k}{g_i}$	$\frac{\lambda_{1i}}{10}$	0.1
Perturb., Var. de Parâmetros e Din. Não-modelada				
$a_z = 2 + 0.5\text{sen}(6t)$	$a_p = 1 + 0.5\text{sen}(6t)$	$d_o = 0.1\text{sen}(20t)$		
20	$\frac{0.4}{\bar{c}}$	$\frac{50k}{g_i}$	$\frac{\lambda_{1i}}{10}$	0.01

Figura 3: Dados de projeto da rede RBF

Na Fig. 4, observa-se que o sistema alcança o modelo de referência com um transitório rápido e não oscilatório. O sinal de controle é suave e de amplitude moderada, livre de *chattering*. A rápida convergência dos pesos da rede RBF é mostrada na Fig. 5.

Na Fig. 6, a rede RBF rejeitou as perturbações que foram introduzidas no intervalo de  $0.5 \leq t \leq 1.7$  e as variações conforme a tabela na Fig (3). O sinal de controle apresenta componentes oscilatórias, devido às perturbações. A convergência dos pesos para a situação supracitada são apresentados na Fig. 7.

Ao se acrescentar a dinâmica não-modelada ao caso anterior, nota-se a degradação do comportamento do sistema com muitas oscilações, o sinal de controle mostra-se oscilatório, mas livre de *chattering*, e a estabilidade do sistema é mantida (Fig. 8). A evolução dos pesos também é oscilatória, mas estável (Fig. 9).

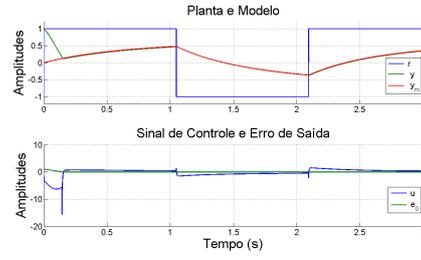


Figura 4: RBF em Modo Dual

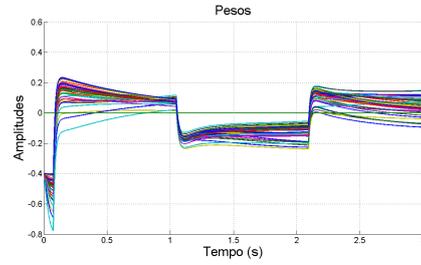


Figura 5: RBF em Modo Dual- Pesos

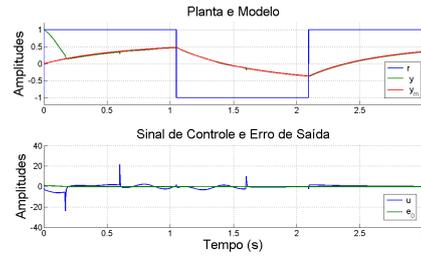


Figura 6: Perturbações e Variações Paramétricas

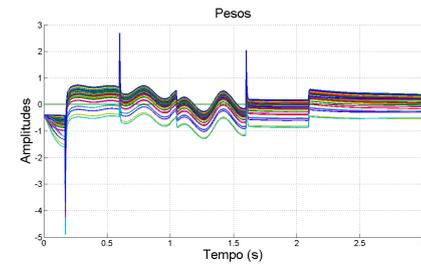


Figura 7: Pesos (Perturbações e Variações Paramétricas)

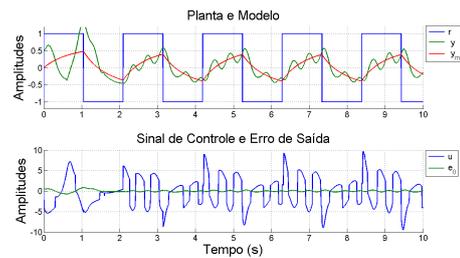


Figura 8: Perturbações, Variações Paramétricas e Dinâmica Não-modelada

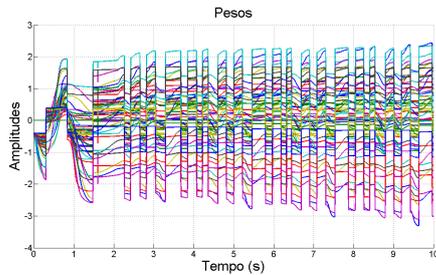


Figura 9: Pesos (Perturbações, Variações Paramétricas e Dinâmica Não-modelada)

### 3 Conclusões

Foi apresentada uma rede RBF cujos pesos foram adaptados usando uma metodologia dual. Mostrou-se a prova de estabilidade pela teoria de Lyapunov, e constatou-se a convergência assintótica das trajetórias do sistema para um conjunto residual. A rede RBF foi utilizada para controlar um sistema não linear, e mostrou bons resultados como um sinal de controle suave e livre de *chattering*, bem como estabilidade diante de perturbações, variações paramétricas e dinâmica não-modelada.

### Referências

- Chen, T., Chen, T. e Chen, R. (1995). Approximation capability to functions of several variables, nonlinear functionals and operators by radial basis function neural networks, *IEEE Trans Neural Netw* **6**(4): 904–910.
- Cunha, C. D., Araujo, A. D., Barbalho, D. S. e Mota, F. C. (2005). A dual-mode adaptive robust controller applied to the speed control of a three-phase induction motor, *Asian Journal of Control* **7**(2): 197–201.
- Frikha, S., Djemel, M. e Derbel, N. (2010). Neural network adaptive control scheme for nonlinear systems with Lyapunov approach and sliding mode, *International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics* **3**(3): 495–513.
- Guo, H., Lin, S. e Liu, J. (2006). A radial basis function sliding mode controller for chaotic Lorenz system, *Physics Letters A* **351**(4–5): 257 – 261.
- Hsu, C.-F. (2011). Adaptive dynamic RBF neural controller design for a class of nonlinear systems, *Appl. Soft Comput.* **11**(8): 4607–4613.
- Hsu, L. (1990). Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurements: the general case, *Automatic Control, IEEE Transactions on* **35**(11): 1238 –1243.
- Hsu, L. e Real, J. A. (1997). Dual mode adaptive control with Gaussian networks, *Decision and Control, 1997. Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, Vol. 4, pp. 4032–4037.
- Huang, S.-J. e Chiou, K.-C. (2006). An Adaptive Neural Sliding Mode Controller for MIMO Systems, *J. Intell. Robotics Syst.* **46**(3): 285–301.
- Jinzhu, Z. e Hongtian, Z. (2010). Vehicle stability sliding mode control based on rbf neural network, *Advanced Computer Control (ICACC), 2010 2nd International Conference on*, Vol. 4, pp. 243 –246.
- Liu, G. e Zhang, X. (2008). Robust sliding-mode control for induction motor drive with rbf neural network based rotor speed estimation, *Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, pp. 1282 –1286.
- Nouri, A. S., Mira, C. e Lopez, P. (1993). Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements with two sliding surfaces, pp. 2171–2177.
- Oliveira, O. C., Araujo, A. D. e Martins, A. M. (2011). Decoupling of a synchronous generator by an adaptive model reference control based on radial basis functions, *Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy)*, Vol. 18, Part 1, pp. 2638–2643.
- Park, J. e Sandberg, I. W. (1991). Universal approximation using radial-basis-function networks, *Neural Comput.* **3**(2): 246–257.
- Sanner, R. M. e Slotine, J.-J. E. (1992). Gaussian networks for direct adaptive control, *Trans. Neur. Netw.* **3**(6): 837–863.
- Sastry, S. e Bodson, M. (1989). *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, chapter 3, pp. 103, 104.
- Young, K. D., Utkin, V. I. e Ozguner, U. (1999). A control engineer’s guide to sliding mode control, *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **7**(3): 328 –342.
- Zhihong, X. H. M., Yu, Eshraghian, K. e Palaniswami, M. (1995). A robust adaptive sliding mode tracking control using an rbf neural network for robotic manipulators, *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, Vol. 5, pp. 2403–2408.