

CONDIÇÕES RELAXADAS PARA A ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS FUZZY TS CHAVEADOS USANDO CONTROLADORES PDC

FLÁVIO A. FARIA*, MICHELE C. VALENTINO†, VILMA A. OLIVEIRA†

**Departamento de Físico Química,
Instituto de Química,
UNESP - Univ Estadual Paulista,
Araraquara, SP, Brazil.*

†*Departamento de Engenharia Elétrica,
Escola de Engenharia de São Carlos,
USP - Universidade de São Paulo,
São Carlos, SP, Brazil.*

Emails: flaviopf15@iq.unesp.br, michele.valentino@usp.br, vilma@sc.usp.br

Abstract— Using a fuzzy Lyapunov function and a well-known right-hand side relaxation method, less conservative conditions for stabilization of switched TS fuzzy systems with PDC controllers are given. The approach is based on the solution of linear matrix inequalities, which can be efficiently solved by convex programming techniques. A numerical example illustrates the efficiency of the proposed result.

Keywords— PDC fuzzy controllers, switched TS fuzzy systems, fuzzy Lyapunov functions, linear matrix inequalities (LMIs).

Resumo— Usando uma função de Lyapunov fuzzy e um consagrado método de relaxação a direita, condições menos conservadoras para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados com controladores PDC são propostas. O método é baseado na solução de desigualdades matriciais lineares, as quais podem ser eficientemente resolvidas por técnicas de programação convexa. Um exemplo numérico ilustra a eficiência do método proposto.

Palavras-chave— Controladores fuzzy PDC, sistemas fuzzy TS chaveados, funções de Lyapunov fuzzy, desigualdades matriciais lineares (LMIs).

1 Introdução

Controladores fuzzy PDC (do inglês, Parallel Distributed Compensation) representam uma ferramenta simples e eficiente para a abordagem de projetos de controle em sistemas fuzzy Takagi Sugeno (TS) (Takagi and Sugeno, 1985). Essa metodologia consiste em projetar um controlador linear para cada modelo local do sistema fuzzy TS, e então, obter o controlador global a partir de uma combinação fuzzy dos controladores locais (Tanaka and Wang, 2001).

Normalmente, as condições de existência dos ganhos locais estabilizantes são obtidas empregando o método direto de Lyapunov. Esse método consiste em verificar a existência de uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , satisfazendo as seguintes propriedades:

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{x}(t)) > 0 \text{ e } \dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0, \quad (1)$$

$\forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$. Com esse método é possível estudar a estabilidade de sistemas dinâmicos sem conhecer suas soluções. O problema é que não existe uma maneira sistemática para obter a função $V(\mathbf{x}(t))$ e o que se faz, em geral, é investigar a existência de funções quadráticas satisfazendo as restrições (1). Na literatura é possível encontrar uma grande variedade de resultados sobre a aplicação de controladores PDC em sistemas fuzzy TS (Tanaka and Wang, 2001; Arifano et al., 2006; Faria et al., 2011; Faria, Silva and Oliveira, 2013; Lee et al., 2011). Porém, ainda existem poucos resultados sobre esse tema para sistemas fuzzy TS chaveados.

Nos últimos anos sistemas chaveados têm sido bastante estudados. As aplicações vão desde simples problemas aca-

dêmicos a complexos processos industriais, tais como, controle de aeronaves, controle de tráfego aéreo e controle de processos químicos (Chiou et al., 2010). Além disso, o chaveamento de sistemas produz características e comportamentos não encontrados nos subsistemas isolados. Por exemplo, um sistema chaveado que possui todos os subsistemas estáveis pode apresentar trajetórias divergentes para certas leis de chaveamento, ou o contrário, um chaveamento adequado pode estabilizar um sistema chaveado que possua subsistemas instáveis (Colaneri et al., 2008). Consequentemente, uma questão importante para o problema de estabilidade de sistemas chaveados diz respeito à lei de chaveamento a ser adotada. Este trabalho é focado em leis de chaveamento dependentes dos estados (do inglês “state-driven switching method”), ou seja, os estados são usados como sinais de controle para determinar uma regra de chaveamento que em conjunto com um controlador fuzzy PDC assegurem a estabilização do sistema chaveado. Esse tipo de estratégia de controle ainda foi pouco explorada e em geral os resultados encontrados na literatura usam uma função de Lyapunov quadrática (FLQ) simples (Yang et al., 2008; Chiou et al., 2010; Ojleska et al., 2011) ou múltipla (Shuliang et al., 2009; Jabri et al., 2012) para o projeto do controlador. No entanto, já é conhecido na literatura que FLQs conduzem a resultados conservadores e que em certos casos não é possível encontrar uma FLQ para um sistema estável. Uma maneira simples de obter condições menos conservadoras para o projeto de controladores PDC consiste em usar funções de Lyapunov fuzzy (FLF). Essa classe de funções de Lyapunov permite usar propriedades de funções de pertinência para adicionar variáveis de folga nas restrições

LMI do problema. Em (Faria, Valentino and Oliveira, 2013) foi proposto um método baseado em FLFs que obtém resultados menos conservadores que os existentes em (Chiou et al., 2010).

Tendo em vista a eficiência de FLFs para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados, neste trabalho FLFs são usadas para a obtenção de condições relaxadas para o projeto de controladores fuzzy PDC. A relaxação das LMIs é obtida explorando propriedades de funções de pertinência, tais como as usadas em (Valentino et al., 2012; Valentino et al., 2013; Faria, Valentino and Oliveira, 2013), e empregando o método clássico de relaxação a direita apresentado em (Liu and Zhang, 2003).

Um exemplo numérico ilustra a eficiência do método proposto.

2 Formulação do Problema

Ao longo do texto, a notação $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$ ($\mathbf{M} \succeq \mathbf{0}$) é usada para representar matrizes definidas (semi-definidas) positivas. De modo equivalente a notação $\mathbf{M} \prec \mathbf{0}$ ($\mathbf{M} \preceq \mathbf{0}$) representa matrizes definidas (semi-definidas) negativas. O símbolo (\star) é usado para substituir termos transpostos em uma matriz simétrica.

Este trabalho propõe condições menos conservadoras para o projeto de controladores fuzzy PDC para sistemas chaveados. O procedimento consiste em projetar controladores lineares para cada um dos modelos locais e então gerar o controlador global a partir da combinação fuzzy dos controladores locais. Desta forma, um modelo fuzzy TS realimentado pode ser representado por (Faria, Valentino and Oliveira, 2013):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{r_\sigma} \sum_{i=1}^{r_\sigma} h_{\sigma(t)k}(\mathbf{z}(t)) h_{\sigma(t)i}(\mathbf{z}(t)) \left(\mathbf{A}_{\sigma(t)k} + \mathbf{B}_{\sigma(t)k} \mathbf{K}_{\sigma(t)i} \right) \mathbf{x}(t), \quad (2)$$

sendo $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^s$ um sinal disponível denominado vetor premissa, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\sigma(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{N}$ uma função constante por partes denominada lei de chaveamento, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$, sendo N o número de subsistemas do sistema chaveado, $\mathbf{A}_{\sigma(t)k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B}_{\sigma(t)k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes dos modelos locais, $\mathbf{K}_{\sigma(t)k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ os ganhos locais da realimentação de estados, r_σ o número de modelos locais do subsistema $\sigma(t)$ e $h_{\sigma(t)k}(\mathbf{z}(t))$ as funções de pertinência de cada um dos modelos locais. As funções de pertinência satisfazem as seguintes propriedades:

$$\forall k \in \mathcal{R}_\sigma, h_{\sigma(t)k}(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{r_\sigma} h_{\sigma(t)k}(\mathbf{z}(t)) = 1 \quad (3)$$

sendo \mathcal{R}_σ o conjunto de números inteiros dados por $\{1, 2, \dots, r_\sigma\}$. O objetivo deste trabalho é encontrar condições suficientes para a existência de uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ e de ganhos $\mathbf{K}_{\sigma(t)k}$, tal que o sistema (2) seja assintoticamente estável. Para facilitar a notação, de agora em diante vamos substituir $\sigma(t)$ por p para indicar que no instante t o sistema chaveado (2) está ativo no subsistema p e denotar $h_{\sigma(t)k}(\mathbf{z}(t))$ por h_{pk} .

De (3) obtém-se as seguintes propriedades:

$$\sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} = 0, \quad \forall p \in \mathcal{N}, \quad (4)$$

e

$$\left(\sum_{k=1}^{r_\eta} h_{\eta k} \right)^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq \eta}}^N \left(\sum_{i=1}^{r_\ell} h_{\ell i} \right)^2 = \sum_{k=1}^{r_\eta} h_{\eta k}^2 + 2 \sum_{k=1}^{r_\eta-1} \sum_{i=k+1}^{r_\eta} h_{\eta k} h_{\eta i} - \frac{1}{N-1} \left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq \eta}}^N \sum_{k=1}^{r_\ell} h_{\ell k}^2 + 2 \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq \eta}}^N \sum_{k=1}^{r_\ell-1} \sum_{i=k+1}^{r_\ell} h_{\ell k} h_{\ell i} \right) = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{N}. \quad (5)$$

3 Projeto de controladores PDC para sistemas fuzzy TS chaveados

Seguindo a ideia dos trabalhos (Chiou et al., 2010; Faria, Valentino and Oliveira, 2013), nesta seção são propostas condições relaxadas para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados, explorando a combinação convexa dos subsistemas do sistema chaveado. Para tanto defina o conjunto:

$$\mathcal{P} = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_p \geq 0, \forall p \in \mathcal{N} \text{ e } \sum_{p=1}^N \alpha_p = 1 \right\}. \quad (6)$$

De Chiou et al. (2010) segue que:

Proposição 1 Para um dado $\alpha \in \mathcal{P}$, se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{p=1}^N \alpha_p \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk} h_{pi} \left(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pi} \right) \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

é assintoticamente estável, então existe uma lei de chaveamento que garante a estabilidade assintótica do sistema chaveado (2).

Prova: Prova omitida. \square

Para o desenvolvimento teórico do projeto do controlador emprega-se uma função de Lyapunov fuzzy dada por:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \mathbf{P}(h) \mathbf{x}(t) \quad (8)$$

sendo $\mathbf{P}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{P}_{pk}$. Como foi verificado em

(Valentino et al., 2012; Faria, Valentino and Oliveira, 2013), essa classe de FLFs gera resultados menos conservadores do que os obtidos com funções de Lyapunov quadráticas. A derivada da função (8) é dada por

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \dot{\mathbf{P}}(h) \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}(t)' \mathbf{P}(h) \dot{\mathbf{x}}(t), \quad (9)$$

sendo $\dot{\mathbf{P}}(h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk}$. Como a derivada de (8) depende das derivadas de primeira ordem das funções de pertinência h_{pk} , $\forall p \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{R}_p$. Então, para obter condições

em termos de LMIs definem-se os seguintes conjuntos:

$$D_{pk} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : |\dot{h}_{pk}| \leq \phi_{pk} \right\}, \quad p \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{R}_p \quad (10)$$

sendo ϕ_{pk} números reais positivos conhecidos. O objetivo deste trabalho é propor condições mais relaxadas que as apresentadas em (Faria, Valentino and Oliveira, 2013). Então, apenas para facilitar a leitura do texto, o resultado proposto em (Faria, Valentino and Oliveira, 2013) é exibido a seguir na forma de um lema.

Lema 1 *Sejam α_p e ϕ_{pk} números reais conhecidos satisfazendo (6) e (10), respectivamente. Dadas as constantes $\beta \in \bigcap_{p=1}^N \mathcal{R}_p$ e $\mu > 0$, se existirem matrizes $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y}_{pk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}'_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{Q}_{pk} = \mathbf{Q}'_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo as LMIs*

$$\mathbf{Q}_{pk} \succ \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p \succeq \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (12)$$

$$\tilde{\Lambda}_\phi \prec \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$\Lambda_{pk_pi} + \Lambda_{pi_pk} - 2\Lambda_{p\beta_p\beta} + \frac{2}{N}\tilde{\Lambda}_\phi \prec \mathbf{0}, \quad i < k, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } i, k \in \mathcal{R}_p, \quad (14)$$

$$\Lambda_{pk_pk} - \Lambda_{p\beta_p\beta} + \frac{1}{N}\tilde{\Lambda}_\phi \prec \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{P} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p - \{\beta\}, \quad (15)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\phi &= \sum_{p=1}^N \Lambda_{p\beta_p\beta} + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \Lambda_{pk_pi} &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \star \\ \lambda_{21} & -\mu(\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix}, \\ \lambda_{11} &= \alpha_p(\mathbf{A}_{pk}\mathbf{W} + \mathbf{W}'\mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{Y}_{pi} + \mathbf{Y}'_{pi}\mathbf{B}'_{pk}), \\ \lambda_{21} &= \mathbf{Q}_{pk} - \mathbf{W}' + \mu\alpha_p(\mathbf{A}_{pk}\mathbf{W} + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{Y}_{pi}). \end{aligned}$$

Então, existe uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ tal que o sistema fuzzy TS chaveado (2), com ganhos locais

$$\mathbf{K}_{pk} = \mathbf{Y}_{pk}\mathbf{W}^{-1}, \quad (16)$$

é assintoticamente estável.

Prova: Demonstração omitida. \square

Uma lei de chaveamento que estabiliza o sistema (2) é dada por:

Lei de chaveamento 1: Sejam \mathbf{W} , \mathbf{X}_p , \mathbf{Q}_{pk} e \mathbf{Y}_{pi} soluções do Lema 1. Então, o sistema (2) permanece ou pode ser chaveado para o subsistema $p \in \mathcal{N}$, se no instante t tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &\left\{ \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \left[(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{K}_{pi})' \mathbf{P}(h) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{P}(h)(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk}\mathbf{K}_{pi}) \right] + \mathbf{P}_\phi \right\} \mathbf{x}(t) < \mathbf{0}, \quad (17) \end{aligned}$$

sendo \mathbf{K}_{pi} definido em (16),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(h) &= (\mathbf{W}')^{-1} \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{Q}_{pk} \right) \mathbf{W}^{-1} \text{ e} \\ \mathbf{P}_\phi &= (\mathbf{W}')^{-1} \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} (\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p) \right) \mathbf{W}^{-1}. \end{aligned}$$

O objetivo deste trabalho é obter condições estabilizantes menos conservadoras que as apresentadas no Lema 1. O resultado é obtido explorando as propriedades (4), (5) e o método de relaxação de LMIs apresentado em (Liu and Zhang, 2003).

Teorema 2 *Sejam α_p e ϕ_{pk} números reais conhecidos satisfazendo (6) e (10), respectivamente. Dadas as constantes $\eta \in \mathcal{N}$ e $\mu > 0$, se existirem matrizes $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y}_{pk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{X}_p = \mathbf{X}'_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q}_{pk} = \mathbf{Q}'_{pk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}' \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\mathbf{U}_{p_ik} = \mathbf{U}'_{p_ki} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, satisfazendo (18)-(24) (na próxima página). Então, existe uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ tal que o sistema fuzzy TS chaveado (2), com ganhos locais*

$$\mathbf{K}_{pk} = \mathbf{Y}_{pk}\mathbf{W}^{-1}, \quad (25)$$

é assintoticamente estável.

Prova: Multiplicando (20) por $h_{\eta k}h_{\eta i}$, (21) por $h_{\ell k}h_{\ell i}$, (22) por $h_{\eta k}^2$, (23) por $h_{\ell k}^2$ e somando tudo, seque que

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^{r_\ell} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{\ell k}h_{\ell i} \Upsilon_{\ell k_i} + \tilde{\mathbf{Y}}_\phi \\ &+ \left[\left(\sum_{k=1}^{r_\eta} h_{\eta k} \right)^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq \eta}}^N \left(\sum_{i=1}^{r_\ell} h_{\ell i} \right)^2 \right] \mathbf{T} \\ &\prec \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^{r_\ell} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{\ell k}h_{\ell i} \mathbf{U}_{\ell_ki}. \quad (26) \end{aligned}$$

Então, considerando que

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk}h_{pi} \mathbf{U}_{p_ki} = \\ &\begin{bmatrix} h_{p1} \\ h_{p2} \\ \vdots \\ h_{pr_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{p_11} & \mathbf{U}_{p_12} & \cdots & \mathbf{U}_{p_1r_p} \\ \mathbf{U}_{p_21} & \mathbf{U}_{p_22} & \cdots & \mathbf{U}_{p_2r_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}_{p_r_p1} & \mathbf{U}_{p_r_p2} & \cdots & \mathbf{U}_{p_r_p r_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{p1} \\ h_{p2} \\ \vdots \\ h_{pr_p} \end{bmatrix} \quad (27) \end{aligned}$$

$\forall p \in \mathcal{N}$, segue da propriedade (5) e da LMI (24) que

$$\sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^{r_\ell} \sum_{i=1}^{r_\ell} h_{\ell k}h_{\ell i} \Upsilon_{\ell k_i} \prec \mathbf{0}. \quad (28)$$

Multiplicando (28) a esquerda e a direita por $\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix}'$ e sua transposta, respectivamente, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \star \\ \gamma_{21} & -\mu(\mathbf{W}^{-1} + (\mathbf{W}')^{-1}) \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (29)$$

$$\mathbf{Q}_{pk} \succ \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{N} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (18)$$

$$\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p \succeq \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{N} \text{ e } k \in \mathcal{R}_p, \quad (19)$$

$$\Upsilon_{\eta k_{\eta i}} + \Upsilon_{\eta i_{\eta k}} + \frac{2}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi + 2\mathbf{T} \prec \mathbf{U}_{\eta_{ki}} + \mathbf{U}_{\eta_{ik}}, \quad i < k \text{ e } i, k \in \mathcal{R}_\eta, \quad (20)$$

$$\Upsilon_{\ell k_{\ell i}} + \Upsilon_{\ell i_{\ell k}} + \frac{2}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi - \frac{2}{N-1} \mathbf{T} \prec \mathbf{U}_{\ell_{ki}} + \mathbf{U}_{\ell_{ik}}, \quad \ell \in \mathcal{N} - \{\eta\}, \quad i < k \text{ e } i, k \in \mathcal{R}_\ell, \quad (21)$$

$$\Upsilon_{\eta k_{\eta k}} + \frac{1}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi + \mathbf{T} \prec \mathbf{U}_{\eta_{kk}}, \quad k \in \mathcal{R}_\eta, \quad (22)$$

$$\Upsilon_{\ell k_{\ell k}} + \frac{1}{N} \tilde{\Upsilon}_\phi - \frac{1}{N-1} \mathbf{T} \prec \mathbf{U}_{\ell_{kk}}, \quad \ell \in \mathcal{N} - \{\eta\} \text{ e } k \in \mathcal{R}_\ell, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{p_{11}} & \mathbf{U}_{p_{12}} & \cdots & \mathbf{U}_{p_{1r_p}} \\ \mathbf{U}_{p_{21}} & \mathbf{U}_{p_{22}} & \cdots & \mathbf{U}_{p_{2r_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}_{p_{r_p 1}} & \mathbf{U}_{p_{r_p 2}} & \cdots & \mathbf{U}_{p_{r_p r_p}} \end{bmatrix} \preceq \mathbf{0}, \quad p \in \mathcal{N}, \quad (24)$$

$$\text{sendo } \Upsilon_{pk_{pi}} = \begin{bmatrix} \alpha_p (\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{W}' \mathbf{A}'_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pi} + \mathbf{Y}'_{pi} \mathbf{B}'_{pk}) & \star \\ \mathbf{Q}_{pk} - \mathbf{W}' + \mu \alpha_p (\mathbf{A}_{pk} \mathbf{W} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pi}) & -\mu (\mathbf{W} + \mathbf{W}') \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\Upsilon}_\phi = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

sendo

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= (\mathbf{W}')^{-1} (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h)) \\ &\quad + (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h))' \mathbf{W}^{-1} + \mathbf{P}_\phi, \\ \gamma_{21} &= \mathbf{P}(h) - \mathbf{W}^{-1} + \mu (\mathbf{W}')^{-1} (\mathbf{A}(\alpha, h) \\ &\quad + \mathbf{B}_K(\alpha, h)), \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\alpha, h) = \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} \mathbf{A}_{pk},$$

$$\mathbf{B}_K(\alpha, h) = \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_p h_{pk} h_{pi} \mathbf{B}_{pk} \mathbf{Y}_{pi} \right) \mathbf{W}^{-1},$$

$$\mathbf{P}(h) = (\mathbf{W}')^{-1} \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} h_{pk} \mathbf{Q}_{pk} \right) \mathbf{W}^{-1} \text{ e}$$

$$\mathbf{P}_\phi = (\mathbf{W}')^{-1} \left(\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \phi_{pk} (\mathbf{Q}_{pk} + \mathbf{X}_p) \right) \mathbf{W}^{-1}.$$

Agora, multiplicando (29) a esquerda e a direita pelo vetor $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)' & \mathbf{x}(t)' (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h))' \end{bmatrix}$ e seu transposto, respectivamente, chega-se em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &\left[\mathbf{P}_\phi + (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h))' \mathbf{P}(h) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{P}(h) (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h)) \right] \mathbf{x}(t) \prec \mathbf{0}. \quad (30) \end{aligned}$$

De (4) e (10) tem-se que $\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} \leq \mathbf{P}_\phi$. Logo,

segue de (30) que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &\left[\sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^{r_p} \dot{h}_{pk} \mathbf{P}_{pk} + (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h))' \mathbf{P}(h) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{P}(h) (\mathbf{A}(\alpha, h) + \mathbf{B}_K(\alpha, h)) \right] \mathbf{x}(t) \prec \mathbf{0}. \quad (31) \end{aligned}$$

Desde que (31) é equivalente a (9) ao longo das soluções do sistema (7). Então, pela Proposição 1, existe uma lei de chaveamento que garante a estabilidade assintótica do sistema chaveado (2). \square

Uma lei de chaveamento estabilizante para o sistema (2), é exibida abaixo:

Lei de chaveamento 2: Sejam \mathbf{P}_{pk} e \mathbf{K}_{pi} soluções do Teorema 2. Então, o sistema (2) permanece ou pode ser chaveado para o subsistema $p \in \mathcal{N}$, se no instante t tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &\left\{ \sum_{k=1}^{r_p} \sum_{i=1}^{r_p} h_{pk} h_{pi} \left[(\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pi})' \mathbf{P}(h) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{P}(h) (\mathbf{A}_{pk} + \mathbf{B}_{pk} \mathbf{K}_{pi}) \right] + \mathbf{P}_\phi \right\} \mathbf{x}(t) < \mathbf{0}. \quad (32) \end{aligned}$$

A eficiência do Teorema 2 é ilustrada na solução de um exemplo numérico.

Exemplo

Considere um sistema fuzzy TS (2), representado pelos seguintes modelos locais:

Subsistema 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 6.2 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 10 & -10 + a \\ 6.2 & -1 - b \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{12} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (33a)$$

Subsistema 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} -10 + a & 1 \\ 3 & 0.73 + b \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 3 & 0.27 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (33b)$$

e FPs

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2}, & h_{12} &= 1 - h_{11}, \\ h_{21} &= \frac{1}{1 + e^{x_1(t)}}, & h_{22} &= 1 - h_{21}. \end{aligned} \quad (34)$$

O Teorema 2 foi usado para garantir a estabilização deste sistema considerando vários valores de a e b , tais que, $a \in [8 \ 11]$ e $b \in [8 \ 11]$. A Figura 1 exibe os pontos da região de análise onde foi possível encontrar um ganho estabilizante para o sistema (2). Na simulação, o Teorema 2 foi comparado com Lema 1. Para a solução numérica das LMIs foram usados os pacotes ‘‘YALMIP’’ (Löfberg, 2004) e ‘‘SeDuMi’’ (Sturm, 1999) do MATLAB, também foi suposto que $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.6$, $\phi_{pk} = 5.5$, $\forall p \in \mathcal{N}, k \in \mathcal{R}_p$, $\eta = 1$, $\mu = 0.1$ e no Lema 1 foi considerado $\beta = 1$.

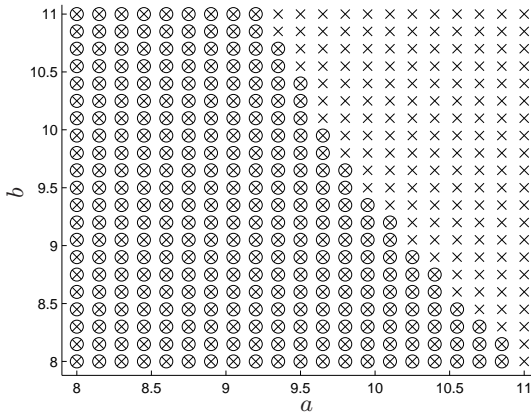


Figura 1: Região de factibilidade do Lema 1(o) e do Teorema 2 (x).

Pela Figura 1, a região de factibilidade do Lema 1 está contida na região de factibilidade do Teorema 2, ilustrando que as novas condições de estabilidade são menos conservadoras que as apresentadas em (Faria, Valentino and Oliveira, 2013). A relaxação foi obtida explorando o método de relaxação de LMIs (Liu and Zhang, 2003) em conjunto com as propriedades (4) e (5). Para ilustrar a eficiência do Teorema 2 na resposta dinâmica do sistema, considere os valores $a = 11$ e $b = 8$. Pela Figura 1, somente o Teorema 2 é capaz de estabilizar o sistema (2) neste ponto. Então, resolvendo as LMIs (18)-(24) do Teorema 2 obtém-se

os seguintes resultados:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.08 \\ -0.01 & 0.20 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \begin{bmatrix} 1.00 & -0.01 \\ -0.01 & 1.00 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_{12} &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0 \\ 0 & 1.00 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{21} &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0 \\ 0 & 1.00 \end{bmatrix}, & \mathbf{Q}_{22} &= \begin{bmatrix} 1.00 & 0 \\ 0 & 1.00 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\mathbf{X}_1 \approx \mathbf{0}, \quad \mathbf{X}_2 \approx \mathbf{0}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11} &= [0.20 \ -0.48], & \mathbf{Y}_{12} &= [0.18 \ -0.16], \\ \mathbf{Y}_{21} &= [-0.12 \ -0.22], & \mathbf{Y}_{22} &= [-0.12 \ 0.11]. \end{aligned} \quad (38)$$

Considerando $\mathbf{P}_{pk} = (\mathbf{W}')^{-1} \mathbf{Q}_{pk} \mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{P}_\phi = (\mathbf{W}')^{-1} \mathbf{Q}_\phi \mathbf{W}^{-1}$ e $\mathbf{K}_{pk} = \mathbf{Y}_{pk} \mathbf{W}^{-1}$, obtém-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= 10^4 \begin{bmatrix} 3.39 & -1.40 \\ -1.40 & 0.58 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{12} &= 10^4 \begin{bmatrix} 3.38 & -1.40 \\ -1.40 & 0.58 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_{21} &= 10^4 \begin{bmatrix} 3.39 & -1.40 \\ -1.40 & 0.58 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{22} &= 10^4 \begin{bmatrix} 3.38 & -1.40 \\ -1.40 & 0.58 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{P}_\phi = 10^5 \begin{bmatrix} 7.45 & -3.08 \\ -3.08 & 1.28 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= [-102.78 \ 40.15], & \mathbf{K}_{12} &= [-97.99 \ 39.75], \\ \mathbf{K}_{21} &= [74.82 \ -32.01], & \mathbf{K}_{22} &= [64.46 \ -26.11]. \end{aligned} \quad (41)$$

Assim, pelo Teorema 2, a origem do sistema (2) com modelos locais (33), funções de pertinência (34), ganhos locais (41) e lei de chaveamento (32), é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Para a condição inicial $x_0 = [-0.4 \ 1.2]'$, as Figuras 2 e 3 exibem a resposta dinâmica do sistema controlado e a lei de chaveamento (32), respectivamente.

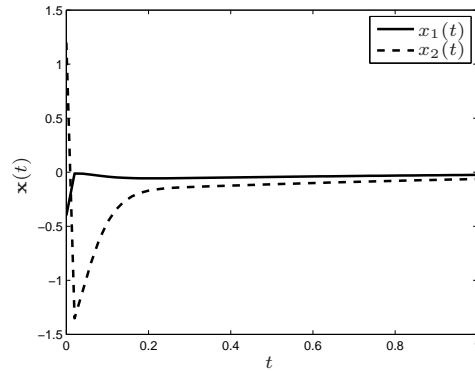


Figura 2: Resposta dinâmica do sistema (2) com modelos locais (33), funções de pertinência (34) e ganhos locais (41), para a condição inicial $x_0 = [-0.4 \ 1.2]'$.

4 Conclusões

Neste trabalho foram propostas condições relaxadas para a estabilização de sistemas fuzzy TS chaveados usando controladores PDC. Explorando propriedades de funções de pertinência e um método para relaxação de LMIs, foram propostas condições suficientes para a existência de uma função de Lyapunov fuzzy para a combinação convexa dos subsistemas do sistema chaveado. Posteriormente, essa função de Lyapunov foi usada para gerar uma lei de chaveamento estabilizante para o sistema chaveado. Um exemplo

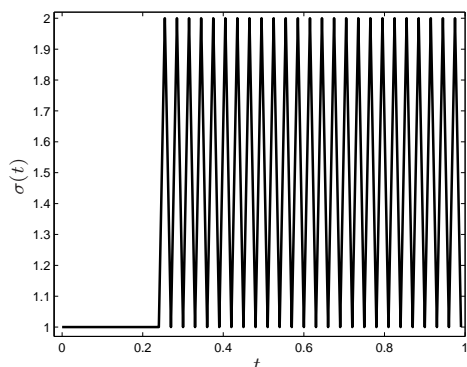


Figura 3: Lei de chaveamento (32), com matrizes (33), (39)-(41) e funções de pertinência (34).

numérico foi usado para ilustrar que o método proposto é menos conservador que resultados existentes na literatura.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pelo CNPq (Processos: 150838/2012-3, 142246/2010-7, 304985/2009-0) e FAPESP (Processo: 2013/17869-0).

Referências

- Arrifano, N. S. D., Oliveira, V. A. and Cossi, L. V. (2006). Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach, *Controle & Automação* **17**(2): 213–225.
- Chiou, J., Wang, C., Cheng, C. and Wang, C. (2010). Analysis and synthesis of switched nonlinear systems using the T-S fuzzy model, *Applied Mathematical Modelling* **34**(6): 1467–1481.
- Colaneri, P., Geromel, J. C. and Astolfi, A. (2008). Stabilization of continuous-time switched nonlinear systems, *Systems & Control Letters* **57**(1): 95–103.
- Faria, F. A., Silva, G. N. and Oliveira, V. A. (2013). Reducing the conservatism of LMI-based stabilization conditions for TS fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions, *International Journal of Systems Science* **44**(10): 1956–1969.
- Faria, F. A., Silva, G. N., Oliveira, V. A., Cardim, R. and da Silva, E. R. P. (2011). Projeto de controladores fuzzy usando funções de Lyapunov fuzzy, *Anais do X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, São João del-Rei, MG, pp. 891–896.
- Faria, F. A., Valentino, M. C. and Oliveira, V. A. (2013). Stabilizing switched T-S fuzzy systems using a fuzzy Lyapunov function approach, *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zurique, Suíça, pp. 4305–4310.
- Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., Jaadari, A. and Chinh, C. D. (2012). Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law,

Journal of Control Engineering and Applied Informatics **14**(2): 40–49.

- Lee, D. H., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2011). A new fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **19**(4): 785–791.
- Liu, X. and Zhang, Q. (2003). New approaches to \mathcal{H}_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI, *Automatica* **39**(5): 1571–1582.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, pp. 284–289. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- Ojleska, V. M., Kolemishvska-Gugulovska, T. and Dimirovski, G. M. (2011). Superior performance of switched fuzzy control systems: An overview and simulation experiments, *International Journal of Simulation Systems, Science & Technology* **12**(2): 19–29.
- Shuliang, L., Yang, H. and Zhang, L. (2009). Slack stability analysis of a class of switched fuzzy systems, *Proceedings of 2009 IEEE Chinese Control and Decision Conference*, Shanghai, pp. 6100–6104.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11-12**: 625–653. <http://citeseer.ist.psu.edu/sturm99using.html>.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*, John Wiley and Sons.
- Valentino, M. C., Faria, F. A. and Oliveira, V. A. (2012). Análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS chaveados usando uma função de Lyapunov fuzzy, *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, Campina Grande, PB, pp. 3394–3399.
- Valentino, M. C., Faria, F. A. and Oliveira, V. A. (2013). An extension of the invariance principle for switched T-S fuzzy systems, *Proceedings of the 12th European Control Conference*, Zurique, Suíça, pp. 4322–4327.
- Yang, H., Dimirovski, G. M. and Zhao, J. (2008). A state feedback \mathcal{H}_∞ control design for switched fuzzy systems, *Proceedings of 4th International IEEE Conference on Intelligent Systems*, Varna, Bulgaria, pp. 4–2–4–7.