

FILTRO DE KALMAN VIA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA  
TIAGO S.FAÇANHA\*, ANDRÉ L. CARNEIRO\*, JOSÉ T. C. FILHO\*

\*CENTAURO, Departamento de Engenharia de Teleinformática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará, Brasil.

E-mails: [tiagofacanha@gmail.com](mailto:tiagofacanha@gmail.com), [andreluiz@cefetce.br](mailto:andreluiz@cefetce.br), [jtcosta@ufc.br](mailto:jtcosta@ufc.br)

**Abstract**— The Kalman filter is widely studied and applied in solving various problems, the mathematical development based on its properties and the estimation of Riccati Differential Equations. This paper presents a new solution to the problem of filtering, independent of the Riccati equation, using the principles of optimization and convex duality in order to obtain a quadratic form stable, to obtain directly the filter with reduced time frame for real-time applications in  $H_2$ .

**Keywords**— Kalman Filter, Riccati Differential Equations, Quadratic Programming.

**Resumo**— O Filtro de Kalman é vastamente estudado e aplicado na solução de vários problemas, sendo o seu desenvolvimento matemático baseado em propriedades de Estimação e nas Equações Diferenciais de Riccati. Este artigo apresenta uma nova solução para problema de filtragem, independente das equações de Riccati, utilizando-se dos princípios de otimização convexa e dualidade a fim de obter uma forma quadrática estável, para obtenção de forma direta do filtro, com horizonte de tempo reduzido para aplicações em tempo real, em norma  $H_2$ .

**Palavras-chave**— Filtro de Kalman, Equações Diferenciais de Riccati, Programação Quadrática.

## 1 Introdução

A Filtragem de Kalman vem sendo aplicada em áreas tão diversas quanto: aeroespacial, navegação marítima, instrumentação de usinas nucleares, modelagem demográfica, astronomia, meteorologia, economia e indústria em geral. Este filtro é considerado por muitos um grande avanço da teoria de estimação do século vinte. Muitas realizações desde sua introdução talvez não fossem possíveis sem ele. As principais aplicações da filtragem de Kalman estão nos sistemas de controle modernos e na navegação e rastreamento de todos os tipos de veículos.

O filtro de Kalman é um estimador para o problema gaussiano linear quadrático. Tal problema consiste na estimação dos estados instantâneos de um sistema linear dinâmico perturbado por ruído gaussiano branco por meio de medições linearmente relacionadas aos estados e também contaminadas por ruído branco.

Na prática, o filtro de Kalman é um conjunto de equações que oferece uma solução computacional eficiente para os métodos dos mínimos quadrados. Quando as características da perturbação e do ruído são condizentes com as suposições usadas no desenvolvimento do filtro de Kalman, ou seja, são variáveis aleatórias brancas e suas densidades espectrais são precisamente conhecidas, o filtro de Kalman consiste no processo ótimo de estimação de estados no sentido dos mínimos quadrados e da mínima variância. Entretanto, é difícil ter informações sobre as propriedades estocásticas das perturbações a priori. Neste caso, a estimação de estados baseada no critério dos mínimos quadrados pode sofrer uma degrada-

ção por causa das incertezas nas estatísticas das perturbações (Takaba, 1996).

Todo o cálculo do Filtro de Kalman comum baseia-se nas equações diferenciais de Riccati, que exige um determinado esforço computacional. Este artigo propõe uma metodologia alternativa para solução do problema de filtragem, independente das equações de Riccati, e estabelecemos uma metodologia que pode ser estendida a tópicos mais avançados, viabilizando aplicações em tempo real e fornecendo estratégias de solução relevantes para sistemas dinâmicos sujeitos às incertezas no escopo das teorias de filtragem  $H_2$  (Filtro de Kalman).

Apresentaremos dois exemplos para ilustrar as principais vantagens do novo método, que além de uma consistência algébrica subjacente e permite obter-se uma família de resultados subótimos para filtros, em alguns casos, até melhores que as obtidos via Riccati, com fortes propriedades de estabilidade numérica e matrizes bem condicionadas.

## 2 Formulação do problema do Filtro de Kalman

Considere a descrição do sistema linear e variante no tempo exposto nas equações (1) e (2).

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k \quad (1)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k v_k \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Assumi-se que o ruído de processo,  $w_k = \mathfrak{R}^n$ , e o ruído de medida,  $v_k = \mathfrak{R}^m$ , são variáveis aleatórias independentes, brancas, de média zero e com distribuição de probabilidade gaussiana. Suas matrizes de

correlação são assumidas conhecidas e são representadas por  $Q_w$  e  $R$ , respectivamente. O vetor de estados a ser estimado é  $x_k = \mathfrak{X}^n$ , enquanto que  $y_k = \mathfrak{Y}^m$  é o vetor de medidas.

É importante lembrar que o ruído de processo é usado para descrever tanto os erros ocorridos no processo quanto as incertezas no modelo de estados. As matrizes  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  e  $D_k$  possuem dimensões adequadas e a estimativa inicial  $x_0$  é  $\bar{x}_0$ , sem perda de generalidade. Como já foi comentado, o filtro de Kalman é o processo ótimo de minimização do erro quadrático de estimação de estados, Já que o erro de estimação é causado pelas perturbações, construídas pelas incertezas na estimativa inicial do vetor de estados e pelos ruídos de processo e de medida, o problema consiste em determinar a estimativa  $\hat{x}_k$  do vetor de estados através do seguinte processo de otimização (Sayed, 2001).

$$\min_{x_0, w, v} J_{H_2}(x_0, w, v) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi}^2 + \sum_{k=0}^K (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2) \quad (3)$$

Sujeito as equações (1) e (2), e sendo  $\Pi$  uma matriz definida positiva que representa a incerteza do estado inicial. O filtro de Kalman estima o vetor de estados de um processo através de um controle com realimentação de estados. Por isso, suas equações são recursivas, o que torna o processo de estimação de estados menos dispendioso em termos de esforço computacional.

Pelo fato de o filtro de Kalman ter sido vastamente estudado e aplicado em diversos problemas, o desenvolvimento matemático do processo de otimização anunciado na equação (3) é omitido. Segue abaixo, na Tabela 1, um resumo das equações do filtro de Kalman utilizando as equações de Riccati.

Tabela 1. Resumo das Equações de Riccati

Preditor(Estimativa a priori)	$\hat{x}_{k/k-1} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1}$
Recursão de Riccati	$P_{k/k-1} = A_{k-1} P_{k-1/k-1} A_{k-1}^T + B_{k-1} Q_w B_{k-1}^T$
Cálculo da estimativa (atualização do estado)	$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1})$
Cálculo da covariância	$P_{k/k} = (I - K_k C_k) P_{k/k-1}$
Preditor (Estimativa a priori)	$K_k = P_{k/k-1} C_k^T (C_k P_{k/k-1} C_k^T + R)^{-1}$

### 3 Filtro via Programação Quadrática

Considerando  $\hat{x}_k$  ser uma estimativa de  $x_k$ , baseado na medição de  $\{y_0, \dots, y_k\}$ , podemos reescrever a equação (2):

$$v_k = D_k^{-1} C_k (x_k - \hat{x}_k) \quad (4)$$

Definindo  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$  como sendo o vetor dos resíduos entre os estados reais e os estimados. Podemos reescrever a função custo do filtro:

$$J_{H_2}(\tilde{x}_0, w, v) = \|x_0 - \hat{x}_0\|_{\Pi}^2 + \sum_{k=0}^N \|\tilde{x}_k\|_Q^2 + \sum_{k=0}^N \|w_k\|_{R_k}^2 \quad (5)$$

onde  $Q = C_k^T R^{-1} C_k$ .

O problema de filtragem pode ser formulado como um problema de minimização da função custo (5). Portanto, podemos derivar a função lagrangeana associada a função custo, na equação 5, e ao sistema dinâmico, equações 2 e 3, como:

$$l(\tilde{x}_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) = \|x_0 - \bar{x}_0\|_{\Pi}^2 + \sum_{k=0}^N (\|\tilde{x}_k\|_Q^2 + \|w_k\|_{R_k}^2) + \lambda_{k+1}^T (A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T w_k - \tilde{x}_{k+1}) \quad (6)$$

onde  $\lambda_k \in \mathfrak{R}^N$  e  $Q = B_k R^{-1} B_k^T$ .

Esta função lagrangeana, equação 6 é obtida via dualidade do filtro de Kalman. As equações do Filtro de Kalman podem ser reescritas utilizando matrizes de informação (Todorov, 2006), conforme podemos observar na Tabela 2.

Tabela 2. Dualidade: Filtro de Kalman e o Filtro de Informação

Filtro de Kalman	Filtro de Informação
$P_k$	$P_k^{-1}$
$A_k^T$	$-A_k$
$C_k^T$	$B_k$
$D_k D_k^T$	$D_k D_k^T$
$B_k R^{-1} B_k^T$	$C_k^T R^{-1} C_k$

#### 3.1 Condições necessárias

Para minimizar a função custo, equação 5, em relação a  $x_0$  e  $w_k$ , formamos o hamiltoniano:

$$H_k = \|\tilde{x}_k\|_Q^2 + \|w_k\|_{R_k}^2 + \lambda_{k+1}^T (A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T w_k) \quad (7)$$

Então, as condições necessárias de otimalidade são dadas por:

$$\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = \tilde{x}_{k+1} \therefore \tilde{x}_{k+1} = A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T w_k, \quad \tilde{x}_0 = \xi \quad (8)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial w_k} = 0 \therefore w_k^* = -R_k^{-1} C_k \lambda_{k+1} \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial \tilde{x}_k} = \lambda_k \therefore \lambda_k = B_k R^{-1} B_k^T \tilde{x}_k + A_k \lambda_{k+1}, \lambda_{k+1} \in \mathfrak{R}^n \quad (10)$$

Visto que o problema é convexo, estas condições são necessárias e suficientes.

### 3.2 Nova metodologia Filtro de Kalman

Neste artigo, estendemos o conceito da teoria de dualidade para estabelecer relações entre estruturas algébricas resultantes de transformações duais de um conjunto de equações dinâmicas complexas em um conjunto de equações estáticas mais simples. Assim, resolveremos o problema de filtragem ótima através da seguinte formulação dual:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{k+1}} \min_{\tilde{x}_k, w_k} & I(\tilde{x}_k, w_k, \lambda_{k+1}, k) \\ \text{s.a} & (8), (9), (10) \end{aligned} \quad (11)$$

*Proposição 1:* Dada a concavidade da função dual, equação (11) e as restrições dadas pelas equações (8), (9) e (10), o problema dual dinâmico pode ser resolvido através da seguinte forma quadrática estática:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\lambda}} & M(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T H \bar{\lambda} + \bar{\lambda} b + c \\ \text{s.a} & \bar{\lambda} \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (12)$$

onde,  $\bar{H}_{n \times n}$  é uma matriz simétrica por bloco tridiagonal, definida positiva e formada por  $N^2$  blocos de dimensões  $n \times n$ ,  $b$  é um vetor de dimensões  $n \times 1$ ,  $c \in \square$  e  $\bar{\lambda} = [\lambda_1 \dots \lambda_N]^T \in \square^{nN}$ .

*Demonstração:* Para obter a forma quadrática estática da equação (12), substituímos as restrições dadas nas equações (8), (9), (10) na função lagrangeana, e em seguida, expandimos os termos do somatório para os valores de  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , temos:

$$\begin{aligned} L(\bar{\lambda}) = & -\frac{1}{2} \lambda_N^T Q^{-1} \lambda_N + \left[ \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 - \frac{1}{2} \lambda_1^T C_0^T R^{-1} C_0 \lambda_1 + \lambda_1^T A_0^T x_0 \right] \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \left[ -\frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T A_k^T Q^{-1} \lambda_k + \frac{1}{2} \lambda_k^T Q^{-1} A_k^T \lambda_{k+1} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T (C_k^T R^{-1} C_k + A_k^T Q^{-1} A_k) \lambda_{k+1} \right] \end{aligned}$$

Agrupando os termos segundo os vetores adjuntos, obtemos a matriz  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} -C^T R^{-1} C - Q^{-1} & Q^{-1} A & 0 \\ (Q^{-1} A)^T & V_1 - A^T Q^{-1} A & Q^{-1} A \\ 0 & (Q^{-1} A)^T & V_1 - A^T Q^{-1} A \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} A^T \tilde{x}_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad c = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0$$

Portanto, a forma quadrática estática está definida:

$$\max_{\bar{\lambda}} L(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^T H \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^T b + c \quad (14)$$

*Teorema 1:* Seja o problema de filtragem definido na seção 2, existe uma matriz  $P_N$ , solução da recursão de Ricatti, conforme a tabela 1, que pode ser obtida pela seguinte equação:

$$P_N = A \bar{H}_{11} A^T + Q \quad (15)$$

Onde a função custo (5) tem valor mínimo dado por:

$$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \min_{w_k} J(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T P_N \tilde{x}_0 \quad (16)$$

*Demonstração:* Calculando o seguinte valor ótimo de  $\bar{\lambda}^*$  dado pela equação (12), temos:

$$\nabla_{\bar{\lambda}} M(\bar{\lambda}) = \bar{H} \bar{\lambda}^* - b = 0 \quad (17)$$

Na formulação matricial da equação (17):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11} & \bar{H}_{12} & \dots & \bar{H}_{1N} \\ \bar{H}_{21} & \bar{H}_{22} & \dots & \bar{H}_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bar{H}_{N1} & \dots & \dots & \bar{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T x_0 \\ 0_{n \times 1} \\ \vdots \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix}$$

A função custo do filtro de Kalman pode ser reescrita, sem perda de generalidade, para  $N = 2$ ,  $k = 0, 1, 2$

$$J(x_k, w_k, k) = \frac{1}{2} x_0^T Q x_0 + \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A \lambda_2) \\ Q^{-1} \lambda_2 \\ -R^{-1} C \lambda_1 \\ -R^{-1} C \lambda_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{-1}(\lambda_1 - A \lambda_2) \\ Q^{-1} \lambda_2 \\ -R^{-1} C \lambda_1 \\ -R^{-1} C \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Substituindo  $\tilde{x}_N = Q^{-1} \lambda_N^*$ ,  $\lambda_1 = \bar{H}_{11} A^T \tilde{x}_0$  e  $\lambda_2 = \bar{H}_{21} A^T \tilde{x}_0$  na equação (18), temos:

$$\begin{aligned} J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = & \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T Q \tilde{x}_0 + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T A \bar{H}_{11} (\bar{V}_1 \bar{H}_{11} - W \bar{H}_{21}) A^T \tilde{x}_0 \\ & + \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T A \bar{H}_{21} (\bar{V}_2 \bar{H}_{21} + W^T \bar{H}_{11}) A^T \tilde{x}_0 \end{aligned} \quad (19)$$

Assim, ao considerar a matriz identidade  $(\bar{V}_1 \bar{H}_{11} - W \bar{H}_{21}) = I_{n \times n}$  e  $(\bar{V}_2 \bar{H}_{21} - W^T \bar{H}_{11}) = 0_{n \times n}$  e substituir na equação (19), obteremos:

$$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T (A\bar{H}_{11}A^T + Q)\tilde{x}_0$$

onde:  $P_N = A\bar{H}_{11}A^T + Q$

A Tabela 3, mostra um resumo das equações entre o filtro de Kalman utilizando soluções de Riccati ( $P_{RIC}$ ) e a nova metodologia ( $P_{PQ}^{new}$ ).

Tabela 3. Filtro via Riccati e Nova metodologia

Sistema Dinâmico	$\tilde{x}_{k+1} = A_k^T \tilde{x}_k + C_k^T w_k$ $\tilde{y}_k = B_k^T \tilde{x}_k + D_k^T v_k$
Função Custo	$J(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_N^T Q \tilde{x}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k + w_k^T R w_k]$
Solução otimizada	$J^*(\tilde{x}_k, w_k, k) = \frac{1}{2} \tilde{x}_0^T (A\bar{H}_{11}A^T + Q)\tilde{x}_0$
$P_{RIC}$	$P = APA^T - APC^T [C^T PC + R]^{-1} CPA^T + Q$
$P_{PQ}^{new}$	$P = A\bar{H}_{11}A^T + Q$
Ganho Kalman	$K = PC^T [R + CPC^T]^{-1}$
Ganho $F_{VPQ}$	$\hat{F} = (C^T A)^+ [Q^{-1} (\bar{H}_{11} A^T - A\bar{H}_{21} A^T) - A^T]$

A aplicação direta de algoritmos de otimização não linear estática a problemas dinâmicos pode resultar em métodos de otimização com problemas de estabilidade numérica. Considerando o condicionamento do sistema e a possibilidade de resolvermos o problema (12) em dimensões reduzidas da Hessiana ( $\tilde{H}$ ) garantiremos resultados mais significativos. Assim, os requerimentos de desempenho computacional para fins de aplicação do algoritmo em tempo real seriam satisfeitos, considerando-se as relevantes questões de instabilidade numérica e soluções imprecisas concernentes a um sistema mal condicionado. Assim, propomos uma estratégia para obtermos um problema equivalente ao original (12) de tal forma que o mesmo seja resolvido através de subproblemas de regiões de confiança (TRS), para os quais a matriz Hessiana  $\tilde{H}$  tenha dominância bloco diagonal (Oliveira, 2000), (Urrea, 2008) e possamos trabalhar com dimensões reduzidas da matriz  $\tilde{H}$ .

Portanto, definimos o seguinte problema de programação não linear baseado em regiões de confiança:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\lambda}} M(\tilde{\lambda}) &= \frac{1}{2} \tilde{\lambda}^T \tilde{H} \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}^T \tilde{b} + \tilde{c} \\ \text{s.a. } \|\tilde{\lambda}\| &\leq \Delta, \Delta > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Onde:  $\tilde{H} = -H$ ,  $\tilde{b} = -b$ ,  $\tilde{c} = -c$

Assim, garantimos que o problema (20) será bem condicionado se  $\Delta$  não é grande. Através dos experimentos realizados, verificamos que para  $N$  pequeno o erro do resíduo  $\|\nabla M(\tilde{\lambda})\|$  é reduzido tor-

nando a matriz  $\tilde{H}$  melhor condicionada. Neste sentido, é possível uma redução significativa da dimensão da matriz  $\tilde{H}$ , de  $nN$  para  $nd$ , onde  $d \ll N$ , o que possibilita diminuir seu número de condição e ratifica o fato de que podemos resolver este problema de otimização convexa (12) por intervalos (LAUB, 1991), ao se resolver sucessivas vezes o problema (20). Por este critério, ao considerarmos  $d=2$  com  $\hat{\lambda}^* = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T$  teremos então o problema (20) aproximado do problema (12), assim:

$$\left( \begin{bmatrix} C^T R^{-1} C + Q^{-1} & -Q^{-1} A \\ -A^T Q^{-1} & C^T R^{-1} C + Q^{-1} + A^T Q^{-1} A \end{bmatrix} + \mu I_{2n \times 2n} \right) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T x_0 \\ 0_{nm} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Então, é possível conseguir dominância no bloco diagonal aumentando-se o valor de  $\mu$  e, por conseguinte, boas propriedades de convergência e uma maior estabilidade numérica.

Notemos que quando  $\mu \rightarrow \infty$ , ou mais especificamente,  $\mu > \max\{0, -\sigma_1\}$ , a matriz  $(\hat{H} + \mu I)$  tende para:

$$\begin{bmatrix} C^T R^{-1} C + Q^{-1} + \mu I_{n,n} & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & C^T R^{-1} C + Q^{-1} + A^T Q^{-1} A + \mu I_{n,n} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Portanto, com as perturbações causadas pelo parâmetro  $\mu$ , é possível situar os autovalores de  $\bar{H}$ , dentro de uma região de confiança:

$$\bar{H} = (\hat{H} + \mu I)^{-1} \quad (23)$$

Assim, torna-se possível reduzir a dimensão do sistema e garantir soluções estáveis e bem condicionadas. A partir de  $\Theta = Q^{-1} (\bar{H}_{11} - A\bar{H}_{21}) A^T$  é possível através de ajustes em  $\mu$  situar os pólos da matriz  $\Theta$  numa determinada região.

#### 4 Análise e Resultados

Nos exemplos que serão considerados, analisaremos os resultados comparativos entre filtro de Kalman com abordagem tradicional e a nova metodologia. Considerando um exemplo didático, temos o seguinte sistema abaixo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 0.1 w_k \\ y_k &= x_k + v_k \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

Neste caso, consideraremos a matriz  $\Pi = 1$ , com ruído  $w_k = 0$  para ver a sensibilidade do filtro  $v_k = D_k^{-1} (y_k - C_k x_k)$ .

O ruído de medição  $V_k$  é visto como ruído branco gaussiano com média zero. Na figura 1 e 2, mostraremos a simulação dos resultados para as seguintes matrizes de correlação:  $R=0,01$  e  $Q_w=1$ .

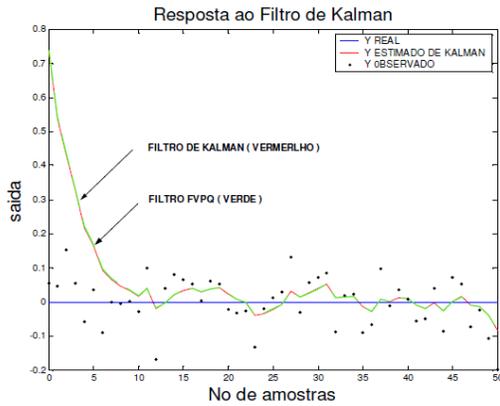


Figura 1 – Erro de Estimação entre Kalman x FVPQ:  $\mu=10$  e  $N_{int.}=2$

Na Figura 1, observamos que para  $\mu=10$  e  $N_{int.}=2$ , temos o mesmo erro de estimação para o filtro de Kalman utilizando as Equações Diferenciais de Riccati e o filtro com a nova metodologia FVPQ. Realizou-se uma redução de condição de  $H$ , conforme o valor de  $N_{int.}$  e/ou ajustamos o valor do parâmetro  $\mu$ .

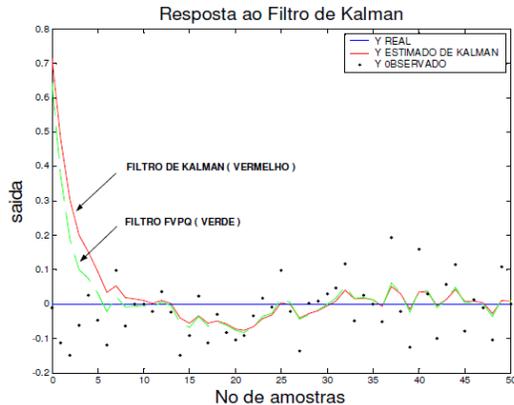


Figura 2 – Erro de Estimação entre Kalman x FVPQ:  $\mu=20$  e  $N_{int.}=2$

Na Figura 2, observamos que para  $\mu=20$  e  $N_{int.}=2$ , temos uma solução com o FVPQ relativamente melhor do que o Filtro de Kalman convencional, onde a metodologia proposta tende mais rapidamente a seguir o sinal real.

Também temos a vantagem que a nova proposta tem uma redução computacional significativa em relação a o Filtro de Kalman baseado nas Equações de Riccati.

Na Tabela 4, temos uma análise do condicionamento da matriz  $H$ .

Tabela 4 – Análise de condicionamento de  $H$ .

Total de iterações	Valor de $\mu$	$\begin{pmatrix} \lambda_{\max} \\ \lambda_{\min} \end{pmatrix}$	Condicionamento $H$	Ganho Kalman / FVPQ
$N_{int.}=18$	$\mu=0$	$\begin{pmatrix} 408,2343 \\ 11,8316 \end{pmatrix}$	34,5037	0,2824 / 0,2824
$N_{int.}=2$	$\mu=0$	$\begin{pmatrix} 272,9145 \\ 49,3077 \end{pmatrix}$	5,5349	0,1743 / 0,1743
$N_{int.}=2$	$\mu=10$	$\begin{pmatrix} 282,9145 \\ 59,3077 \end{pmatrix}$	4,7703	0,2782 / 0,2782
$N_{int.}=2$	$\mu=20$	$\begin{pmatrix} 292,9145 \\ 69,3077 \end{pmatrix}$	4,2263	0,3542 / 0,3542

### Exemplo 2

Foram utilizados dois conjuntos de vídeo, sendo um experimento controlado em laboratório e outro utilizando vídeos recuperados a partir do projeto Caviar (FISHER, 2002), sendo um vídeo outdoor a partir de um movimento em linha reta.

O primeiro experimento utilizou o movimento de uma esfera com uma câmera posicionada em uma posição superior. A esfera realizou um movimento retilíneo uniforme (MRU), com perturbações, gerando um vídeo com 42 frames e 11frames por segundo (fps). Os valores de inicialização das matrizes relacionadas às equações de estado e as covariâncias do ruído  $R$  são mostradas no sistema abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T, R = \begin{pmatrix} 5.62 & -3.82 \\ -3.82 & 2.63 \end{pmatrix}$$

Foram testados os valores para  $\mu=5$  e  $\mu=20$ . A Figura 3 mostra os resultados de rastreamento obtidos. Observamos na Figura 3(a) que a primeira estimativa do Filtro de Kalman (vermelho) é bem mais próximo do que a estimativa do FVPQ (azul), quando comparado com o real (verde). Na Figura 3(b), com a iteração ( $i=16$ ), observamos que os filtros de Kalman e FVPQ estão com estimativas próximas ao real. Na Figura 3(c) foi inserido uma perturbação que desacelerou o movimento da esfera na iteração ( $i=26$ ). Neste caso, observamos o FVPQ com uma estimativa mais precisa que o filtro convencional. Nas Figura 3(d-f) observamos o mesmo experimento para  $\mu=20$ .

Concluimos, a partir destes experimentos, que o  $F_{VPQ}$  possui maior sensibilidade a perturbação do movimento em relação ao filtro de Kalman. A possibilidade de ajuste do parâmetro  $\mu$  permite maior robustez quanto as variações das perturbações do movimento do objeto em vídeo.

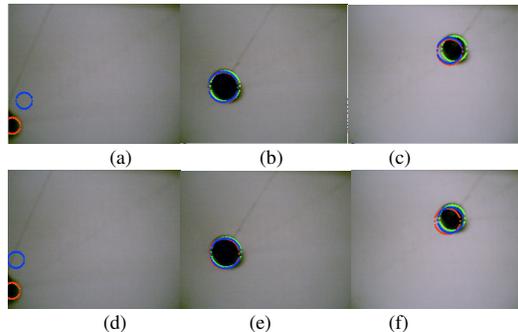


figura.3 - Comparação rastreamento entre KF e  $F_{VPQ}$ :  
(a-c)  $\mu=5$ ; (d-f)  $\mu=20$ .

#### 4 Conclusão

Neste artigo, apresentamos por meio de teoremas uma nova proposta para síntese para filtros em sistemas discretos no tempo, que possibilitam a obtenção de uma família de ganhos, com uma solução alternativa a resolução de Equações Diferenciais de Riccati. Na seção 4, analisamos dois exemplos para solução de filtros com dimensão  $d = N$  e reduzidas para  $d = 2$  da Hessiana  $H$  e verificamos o condicionamento da matriz  $H$ . Na simulação, apresentamos a idéia de matriz pequena para ilustrar graficamente o comportamento de contração da matriz de ganho segundo as variações do parâmetro  $\mu$ . Ao compararmos a nova proposta com as soluções convencionais de filtros via Riccati, ressaltamos as vantagens do novo método, com eficiência no tocante as condições de desempenho, estabilidade, e principalmente, a característica de flexibilidade no sentido de se poder obter uma família de soluções eficientes através de ajustes no parâmetro  $\mu$ .

#### Agradecimentos

Esta pesquisa contou com o suporte da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) e Núcleo de Tecnologia Industrial do Ceará (NUTEC).

#### Referências Bibliográficas

- FISHER, R. Project Caviar: Context Aware Vision using Image-based ActiveRecognition, 2002.
- LAUB, A. Invariant subspace methods for the numerical solution of Riccati equations. *In the Riccati Equation*, Bittanti, S., A. Laub, and J. Willems, Eds, Berlin: Springer-Verlang, p. 163-196, 1991.
- OLIVEIRA, M. C. Controle de Sistemas Lineares baseados nas desigualdades matriciais lineares, *Tese de Mestrado em Engenharia Elétrica*, UNICAMP, 2000.
- SAYED, A. H. A Framework for State-Space estimation with Uncertain Models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n° 7, p.998-1013, Julho, 2001.
- TAKABA, K. "Studies on  $H$ in Filtering Problems for Linear Discrete-Time Systems," Tese de Doutorado, Kyoto University, Janeiro 1996.
- TODOROV, E. Optimal Control Theory. University of California San Diego, 2006.
- URREA, L. J. Um Método para Região de Confiança para minimização Irrestrita, *Tese de Mestrado*, UNICAMP, 2008.