

# CONTROLE AUTOMÁTICO DE UM PROCESSO TÉRMICO COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS UTILIZANDO TÉCNICAS DE CONTROLE MODERNO

ÂNGELO E. O. FRANCO\*, JOÃO C. OLIVEIRA\*, VALTER J. S. LEITE\*

\* PPGEL - CEFET-MG & CEFET-MG / Campus Divinópolis

R. Álvares Azevedo, 400, 35500-970

Divinópolis, MG, Brasil

Emails: angeloengenio@msn.com, joaacarlos@div.cefetmg.br, valter@ieee.org

**Abstract**— It is presented in this paper a prototype that can be used as a test bed to the study of multivariable control techniques. It consist in a system to heat the air with 3 regions where the temperature is required to be controlled. In this work the process is modeled as a first order multivariable system and some modern control techniques are investigated to assure that the temperature in each region of the prototype follows the set-point given by the user. To achieve such an objective, an state estimator, a control loop by state feedback, and a output feedback with an integrator — with 3 inputs and 3 outputs assuring null error in steady-state for step inputs in the reference signal — are implemented. It has been verified that the techniques based on linear matrix inequalities fail to obtain, in this case, a diagonal control gain matrix for the multivariable integrator. It has been verified that some tested linear matrix inequalities based conditions failed to stabilize the closed-loop system. Because of this, an heuristic has been proposed to obtain a diagonal matrix for the multivariable integrator. The experimental results are given as well as some perspective to future investigations.

**Keywords**— Multivariable control, state feedback control, applications of dynamical systems.

**Resumo**— Neste trabalho é apresentado um protótipo que serve ao estudo de técnicas de controle multivariável. Trata-se de um sistema de aquecimento de ar composto por 3 regiões em que a temperatura deve ser controlada. Neste trabalho o processo é modelado como um sistema de primeira ordem multivariável e são investigadas técnicas de controle moderno para que as temperaturas nas 3 regiões sigam sinais de referência estabelecidos pelo usuário. Para isso, são implementados um estimador de estados, uma malha de controle por realimentação de estados e uma realimentação de saída acrescida de um integrador com 3 entradas e 3 saída para que o erro em regime permanente seja mitigado para sinais de referência em degrau. Ao projetar a matriz de ganhos do integrador foi verificado que técnicas baseadas em desigualdades matriciais lineares não permitem a obtenção, neste caso, de uma matriz de ganhos diagonal. Assim, é proposta uma heurística para a busca de uma matriz diagonal a partir de uma dada matriz de ganhos que seja completa. Os resultados experimentais são apresentados assim como as perspectivas para continuação desses estudos.

**Palavras-chave**— Controle multivariável, controle por realimentação de estados, aplicações de sistemas dinâmicos.

## 1 Introdução

No âmbito industrial faz-se necessário controlar as variáveis que afetam o produto final no decorrer de um determinado processo. Este pode contar com diversas etapas as quais devem atender a condições adequadas à obtenção do produto final. É neste âmbito que se aplica o estudo de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Portanto, a obtenção de um controlador capaz de lidar com os atuadores presentes no processo (entradas) e com as condições adequadas a cada etapa (saídas) é importante na qualidade do produto final. Pode-se citar como exemplos de processos com múltiplas entradas e múltiplas saídas: tratamento térmico; fundição; injeção de plásticos e alumínio; químicos e petroquímicos dentre outros.

Neste trabalho é apresentado um protótipo desenvolvido com a finalidade de testar algoritmos de controle. O protótipo consiste em um sistema de aquecimento de ar e possui 3 regiões distintas para controle de temperatura, cada uma com um atuador. Portanto, trata-se de um sistema multivariável com 3 entradas de controle 3 saídas

controladas.

Uma questão investigada neste trabalho é a síntese de ganhos independente, isto é, uma matriz diagonal, para os integradores utilizados no controle. Nesse caso, técnicas básicas de síntese de controlador baseadas em desigualdades matriciais lineares falham na obtenção de um ganho estabilizante.

Nesse contexto são aplicadas técnicas de controle moderno baseadas em um modelo bastante simplificado do processo. Apesar disso, mostra-se por experimentos que os controladores obtidos são capazes de manter a regulação do sistema e de apresentar um seguimento de referência mesmo em regiões distanciadas do ponto utilizado para a linearização do sistema.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2 é descrito o problema que é investigado neste trabalho. O protótipo é apresentado na seção 3, assim como o modelo simplificado de primeira ordem utilizado para a síntese dos controladores. O procedimento usado para a síntese dos controladores é descrito na seção 4 e a aplicação do controlador obtido e análise dos resultados

experimentais são feitas na seção 5. Na seção 6 são apresentadas algumas conclusões e perspectivas para continuidade desse trabalho.

**Notação** O símbolo  $\star$  indica um bloco simétrico nas desigualdades matriciais lineares. As matrizes  $\mathcal{I}$  e  $\mathbf{0}$  são respectivamente a matriz identidade e a matriz nula de dimensões apropriadas.  $M > (\geq) \mathbf{0}$  indica que a matriz  $M$  é simétrica e (semi)definida positiva.  $M'$  a um vetor ou matriz, indica a operação de transposição.  $\mathbb{R}$  é conjunto dos números reais.

## 2 Formulação do problema

Considere o sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (1)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor dos sinais de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  é o vetor dos sinais de saída e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  possuem entradas reais e dimensões adequadas. Uma topologia comumente empregada para o controle do sistema descrito por (1) via realimentação de estados e assegurar o erro nulo em regime permanente para entradas em degrau, inclui uma malha que realimenta o sinal de saída e acresce a ação integral no ramo direto como mostrado na Figura 1. Neste caso o sinal de controle aplicado no sistema é dado por

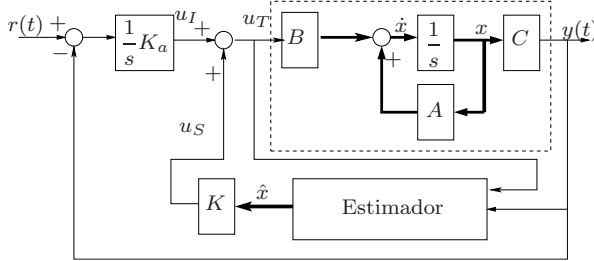


Figura 1: Realimentação de estados estimados e ação integral.

$$u_T(t) = u_I(t) + u_S(t) \quad (2)$$

em que o sinal de controle total,  $u_T(t)$ , é composto por um sinal vindo da realimentação de estados,  $u_S(t)$  e outro,  $u_I(t)$ , vindo da ação integral adicionada na topologia. A parcela do sinal de controle vinda da realimentação de estados é dada por

$$u_S(t) = K\hat{x}(t) \quad (3)$$

em que  $K \in \mathbb{R}^{(p \times n)}$  é o ganho de realimentação de estados e  $\hat{x}(t)$  é o vetor de estados estimados. A outra parcela do sinal de controle é devida à ação integral e é dada por

$$u_I(t) = K_a \int_0^t [r(t) - y(t)] dt \quad (4)$$

em que  $K_a \in \mathbb{R}^{(q \times q)}$  é o ganho de integração. Os estados estimados são fornecidos pelo estimador indicado na Figura 1 sendo calculado como:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \quad (5)$$

em que  $L \in \mathbb{R}^{(n \times q)}$  é determinado de forma a assegurar que os autovalores de  $(A - LC)$  pertençam a uma região mais à esquerda que os autovalores da malha fechada do sistema controlado. Técnicas convencionais para o projeto de  $L$  podem ser encontradas, por exemplo, em (Chen, 1999). O projeto do controlador utiliza realimentação de estados, um integrador e uma realimentação unitária conforme proposto em (Chen, 1999). A saída do integrador,  $x_a(t) \in \mathbb{R}^q$ , é usada para a descrição do sistema aumentado — isto é, incluindo-se o integrador. Assumindo o estado aumento  $X(t) = [x' \ x_a']'$ , o sistema com o integrador pode ser descrito como

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & \mathbf{0} \end{bmatrix} X(t) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &+ \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} K_T X(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} r(t) \\ y &= [C \ \mathbf{0}] X(t) \end{aligned} \quad (7)$$

em que  $K_T = [K \ K_a]$

Como é sabido da teoria de sistemas lineares, se o par  $(A, B)$  é controlável e  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  não possui polos em  $s = 0$ , então o todos os autovalores da matriz  $A$  podem ser arbitrados pela determinação do ganho de realimentação de estados (Chen, 1999, Página 244). De maneira análoga, se o par  $(A, C)$  é observável, então os autovalores de  $(A - LC)$  podem ser arbitrados a partir da escolha de  $L$ . Entretanto, esse não é o caso quando deseja-se impor uma estrutura ao ganho de realimentação de estados. Neste trabalho procura-se determinar a matriz  $K_T = [K \ K_a]$  considerando que  $K_a$  é uma matriz bloco diagonal, o que resulta no problema principal a ser estudado neste trabalho:

**Problema 1** *Determine ganhos  $K_T = [K \ K_a]$  tais que o sistema (1) controlado por (2)-(4) com ganho  $K_a$  diagonal seja estável e possua polos em uma região pré-especificada do plano complexo.*

## 3 Descrição do processo

Neste trabalho o controle em malha fechada é aplicado ao processo térmico mostrado na Figura 2. O processo é constituído por um duto em alumínio com seção reta quadrada (externa de  $150 \times 1000\text{mm}$  e interna de  $120 \times 1000\text{mm}$ ). Entre as paredes interna e externas há uma isolamento térmica em poliuretano expandido. Em uma das extremidades da estrutura de alumínio há um ventilador coaxial que insufla o ar através do duto

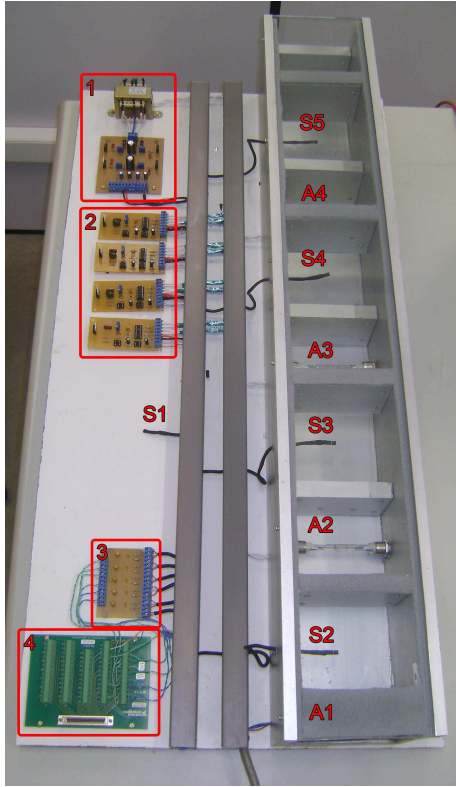


Figura 2: Visão Geral do Protótipo

que é dividido em oito câmaras nas quais se encontram quatro atuadores ( $A_1$  a  $A_4$ ) — um ventilador coaxial e três lâmpadas halógenas de 150W para aquecimento do ar — e cinco sensores de temperatura ( $S_1$  a  $S_5$ ). Esse duto possui 8 regiões, numeradas de 1 a 8 a partir do ventilador coaxial ( $A_1$  na Figura 2).

Foi desenvolvida uma interface computacional em Matlab utilizando o os *toolboxes Simulink* e *Real Time Windows Target*. Essa interface é usada para adquirir e enviar sinais através da placa *PCI 6229* da *National Instruments* cujo bloco conector é identificado pelo número 4 na Figura 2. Ainda nessa figura podem ser identificados o circuito de alimentação (1), quatro circuitos de potência responsáveis por controlar a tensão de alimentação dos atuadores mediante sinal de comando proveniente da interface computacional (2) e um conjunto de filtros RC para tratar os sinais analógicos advindos dos sensores de temperatura (veja 3 na Figura 2). Dessa maneira, as variáveis de entrada deste processo são:

- Vazão volumétrica de ar, controlada pela ação de um ventilador axial (Atuador 1) alimentado com tensão alternada de 0 a 220 V. Essa tensão é fornecida pelo circuito de potência (veja 1 na Figura 2), sendo proporcional ao sinal de controle proveniente da interface computacional.
- Temperatura do ar no interior das câmaras 3, 5 e 7, controlada pela potência dissipada em

lâmpadas halógenas de 150 W (Atuadores  $A_2$  a  $A_4$  na Figura 2), alimentadas com tensão alternada de 0 a 220 V, fornecida pelos circuitos de potência indicados por 2 na Figura 2, proporcional ao sinal de controle proveniente da interface computacional. O Atuador  $A_1$  pode variar a velocidade do ventilador coaxial e, neste trabalho, esse atuador é usado para causar perturbações controladas no sistema.

As variáveis de saída são constituídas pela temperatura ambiente e as temperaturas nas câmaras 1, 3, 5 e 7. Essa variáveis são medidas por sensores LM35 ( $S_1$  a  $S_5$  na Figura 2) que possuem uma relação tensão de saída/temperatura de  $+10\text{mV}/^\circ\text{C}$ . Os sinais elétricos em tensão desses sensores passam por um filtro analógico (3) e então são enviados a placa de aquisição de dados localizada em um computador. Foram construídas as curvas de calibração estática dos sensores e dos atuadores ajustando-se uma reta aos pontos medidos por meio do método de mínimos quadrados. Para a medição de temperatura foi usado como referência uma sonda para medição de temperatura no ar de marca Fluke 80PK-24. Foram obtidos os parâmetros de calibração mostrados na Tabela 1 e 2, em que  $T_i(v_{S_i})$  é a temperatura medida pelo sensor  $S_i$ ,  $v_{S_i}$ , e  $V(u_i)$  é a tensão aplicada na placa de potência (veja 2 na Figura 2) que gera o sinal para o atuador  $A_i$  a partir do comando  $u_i$ .

Tabela 1: Calibração dos Sensores  $S_1$  a  $S_5$ :  
 $T_i(v_{S_i}) = m_i v_{S_i} + b_i$ .

$S_i$	$m_i$	$\sigma_{m_i}$	$b_i$	$\sigma_{b_i}$
$S_1$	93.1840	0.2513	2.3334	0.0722
$S_2$	94.0975	0.2508	0.7339	0.0756
$S_3$	94.2868	0.2460	1.6604	0.0716
$S_4$	96.8556	0.2482	0.4479	0.0735
$S_5$	99.1622	0.2447	0.1971	0.0713

Tabela 2: Calibração dos Circuitos de Potência  
 $V(u_i) = m_i u_i + b$ .

$u_i$	$m_i$	$\sigma_{m_i}$	$b_i$	$\sigma_b$
$u_1$	0.1845	0.0025	1.0563	0.0016
$u_2$	0.1361	0.0010	1.0938	0.0008
$u_3$	0.1948	0.0027	1.0754	0.0018
$u_4$	0.2000	0.0020	1.0915	0.0012

Salienta-se que nas retas ajustadas para determinar as tensões na saídas dos atuadores já incluem a inversão do ganho do circuito eletrônico de acionamento, de forma a mitigar não-linearidades do circuito de acionamento.

Através do método da resposta complementar (Doebelin, 1990, Página 188) foram obtidos modelos de primeira ordem que relacionam

os sinais de comando de cada um dos atuadores de  $A_2$  a  $A_4$  com as temperaturas captadas pelos sensores  $S_3$  a  $S_5$ . Para isso foram geradas várias sequências de degraus em torno de 60% do sinal de controle nos três atuadores, o que resulta em uma temperatura de trabalho em torno de 29°C.

Assim, a partir dos modelos médios de aquecimento e resfriamento em torno do ponto de operação escolhido, é possível obter uma representação no espaço de estados conforme (1) em que as matrizes são dadas por :

$$A = \begin{bmatrix} -0.0039 & 0 & 0 \\ -0.0020 & -0.0033 & 0 \\ -0.0015 & -0.0021 & -0.0029 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0 & 0 \\ 0.1250 & 0.2500 & 0 \\ 0.1250 & 0.1250 & 0.2500 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.2319 & 0 & 0 \\ 0.2073 & 0.1662 & 0 \\ 0.1309 & 0.1943 & 0.1632 \end{bmatrix}, \quad D = \mathbf{0}$$

Por questões de economia de espaço, os experimentos de validação do modelo proposto não são apresentados neste trabalho. Adicionalmente, foi implementado um filtro digital com polos posicionados de forma a não interferir na dinâmica do processo em malha fechada para reduzir os efeitos de ruídos nos sinais medidos. Esse procedimento foi fundamental para que se pudesse utilizar o estimador de parâmetros mencionado na seção seguinte. Esse filtro foi calculado no domínio de tempo contínuo e é dado por

$$F(s) = \frac{1}{4.1584s^2 + 4.0784s + 1.0000} \quad (9)$$

Na implementação digital, esse filtro foi discretizado utilizando-se o método de Tustin com amostragem  $T = 0.01s$ .

#### 4 Metodologia proposta

O estimador de estados dado em (5) pode ser projetado utilizando-se o comando `place(·)` do Matlab. Para isso foram especificados os autovalores de  $(A+LC)$  em  $-3.6776 \times 10^{-3}$ ,  $-4.1784 \times 10^{-3}$  e  $-4.9039 \times 10^{-3}$ , resultando

$$L = \begin{bmatrix} -0.0011 & 0 & 0 \\ -0.0132 & 0.0050 & 0 \\ 0.0104 & -0.0266 & 0.012 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Para o projeto dos ganhos  $K$  e  $K_a$  foram estudadas duas abordagens: a solução via fórmula de Ackermann (comando `place(·)`) e uma formulação baseada em desigualdades matriciais (LMIs). Neste último caso, utilizou-se como base a condição de estabilidade para o caso discreto no tempo e então considerou-se a substituição da

matriz  $A$  por  $\frac{(A + \alpha\mathbf{I})}{r}$ . Essa manipulação faz com que sejam consideradas uma região circular do plano complexo com centro em  $(-\alpha, 0)$  e raio  $r$ . Veja, por exemplo, (Chilali e Gahinet, 1996), (Chilali et al., 1999) e (Leite e Peres, 2005).

$$\begin{bmatrix} \tilde{W} & \frac{1}{r}(\tilde{W}\tilde{A}^T - \tilde{Z}^T\tilde{B}^T + \alpha\tilde{W}) \\ \star & \tilde{W} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (11)$$

Devido à restrição imposta em  $K_a$ , que deve possuir estrutura diagonal, a condição (11) teria uma vantagem sobre a proposta de síntese via métodos mais tradicionais como os que utilizam alocação de polos para sistemas precisamente conhecidos, como é o caso do comando `place(·)`. Essa suposta vantagem pode, em princípio, ser explorada impondo-se uma estrutura adequada nas matrizes  $W$  e  $Z$  de (11). Entretanto, nenhum resultado factível foi possível de ser obtido com tal restrição nas matrizes  $W$  e  $Z$  de (11).

Como alternativa, foi aplicada a seguinte metodologia: *i)* computar o ganho  $K_T = [K \ K_a]$  a partir de (11) — sem imposição de estrutura nas matrizes — ou do comando `place(·)`; *ii)* a partir do  $K_a$  obtido, anule os elementos fora da diagonal e varie os elementos da diagonal e, para cada variação, calcule as raízes de

$$\det \left( A + B \begin{bmatrix} K & \begin{bmatrix} K_{a1} & 0 & 0 \\ 0 & K_{a2} & 0 \\ 0 & 0 & K_{a3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (12)$$

Aplicando essa sequência de passos e considerando as matrizes do sistema dadas em (8) foi obtida a Figura 3 em que se apresenta uma nuvem de autovalores possíveis de serem especificados para o sistema em malha fechada.

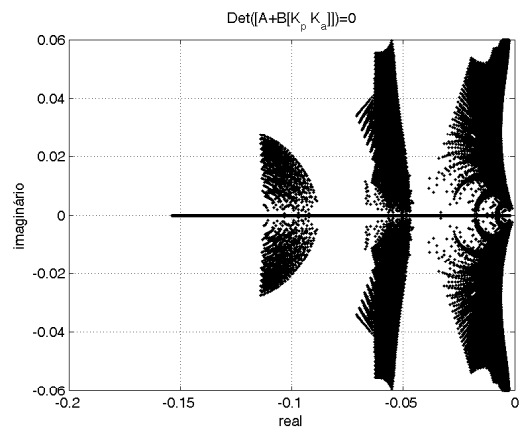


Figura 3: Raízes de  $\det(A + B[K \ K_a]) = 0$ , com  $K_a$  diagonal.

A partir disso fez-se uma busca nos autovalores determinados nessa figura e encontrou-se os que estavam (para um mesmo  $K_a$ ) mais próximo da região de interesse para o sistema. Neste

caso, os ganhos projetados para um controlador que deixam a malha fechada do protótipo cinco vezes mais rápida que a malha aberta são:

$$K = \begin{bmatrix} -1.1268 & -0.4219 & -0.1101 \\ 0.0316 & -0.7695 & -0.2404 \\ 0.1526 & 0.1198 & -0.5528 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$K_a = \begin{bmatrix} 0.0785 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0780 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0785 \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 5 Aplicação

Com o objetivo de validar o controlador obtido foram realizados experimentos em modelos computacionais e posteriormente no protótipo.

Inicialmente foram definidos os pontos de operação a serem utilizados nas câmaras 3, 5 e 7 sendo  $29^\circ C$ ,  $34^\circ C$  e  $39^\circ C$  respectivamente.

Os experimentos realizados com os ganhos (13)-(14) foram de regulação (rejeição à perturbação) e de seguimento de referência. Esses experimentos são descritos a seguir.

*Experimentos de Regulação:* dado um ponto de operação o controlador deve ser capaz de fazer com que a temperatura em cada câmara atinja e se mantenha no valor de referência estabelecido. O comportamento desejado foi observado nesse experimento bem como em todos os outros após o fim do período transitório. Esta resposta é devido a presença do integrador no ramo direto da malha de controle. Assim, com a temperatura estabilizada em seu respectivo valor de referência, foi introduzida no sistema uma perturbação controlada através da alteração da velocidade do ventilador coaxial. Assim, a vazão mássica de ar no interior do protótipo foi reduzida, provendo um maior aquecimento do ar. Para isso, o o sinal de controle do atuador 1 foi alterado de 100% para 80% durante vinte e cinco segundos. Conforme apresentado na Figura 4, é possível observar que no instante em que é aplicada a perturbação, primeira linha vertical, a temperatura na câmara começa a aumentar, devido a isso o sinal de controle no atuador é reduzido de forma a compensar o aquecimento citado, e então ao cessar a perturbação, segunda linha vertical, o sinal de controle é gradativamente ajustado para o valor observado antes da perturbação. O comportamento apresentado pelo controlador é indicativo que esse é capaz de rejeitar perturbações pontuais registradas no decorrer do processo.

*Experimentos de seguimento de referência:* Nestes experimentos as variáveis controladas devem seguir o sinal de referência. Neste caso foram definidos degraus de amplitude de  $1^\circ C$ . A aplicação dos degraus se deu de forma sequencial do primeiro para o último atuador, em degraus ascendentes (aquecimento) e de forma inversa para

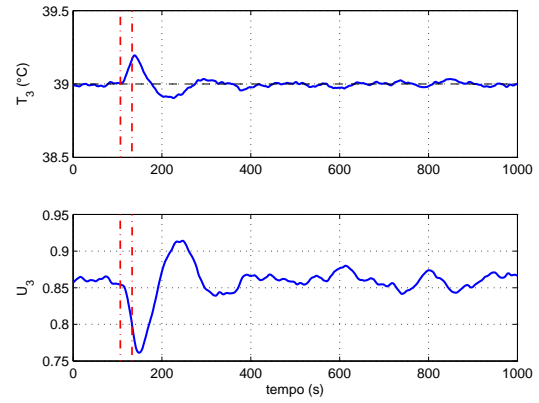


Figura 4: Rejeição a perturbação - Resposta do Protótipo, malha fechada cinco vezes mais rápida que a malha aberta

degraus descendentes (resfriamento). Em ambos os casos, cada degrau teve duração de 800s.

Na Figura 5 é apresentada temperatura de uma das câmaras controladas bem como o sinal de controle do atuador da câmara anterior. No momento da transição o controlador responde ao erro imposto pela mudança da referência e altera o sinal de controle, injetando energia no sistema para os casos de degrau positivo e deixando de fornecer energia para os casos de degraus negativos. Passada a transição o sinal de controle é ajustado para manter a nova referência imposta. Observe que os sinais de controle já apresentam uma variação bastante importante no momento dos transitórios, indicando que a especificação de autovalores utilizada já é bastante exigente.

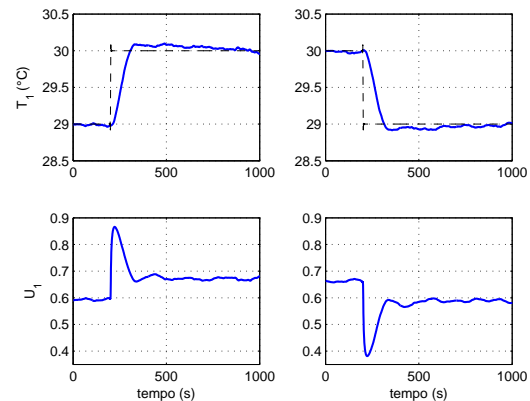


Figura 5: Seguimento de referência: detalhe da resposta do Protótipo na câmara 1 (sensor  $S_2$ ), com malha fechada cinco vezes mais rápida que a malha aberta.

Na Figura 6 são apresentadas as temperaturas nas câmaras controladas para uma sequência de degraus ascendentes e descendentes (aquecimento e resfriamento, respectivamente) nas temperaturas de referência das três câmaras. Nessa

figura é possível observar o efeito do acoplamento retroativo existente entre as câmaras que possuem atuadores e as imediatamente anteriores, esse efeito pode ser observado para  $T_1$  aos 1200s e novamente próximo aos 3800s e 4500s.

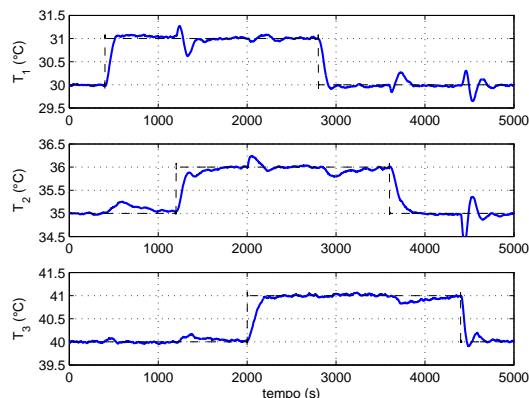


Figura 6: Seguimento de referência: efeito de acoplamento retroativo entre as câmaras do protótipo com malha fechada cinco vezes mais rápida que a malha aberta.

Além disso, é possível notar que em todas as transições o controle foi capaz de rejeitar as perturbações devido às mudanças de temperatura de outras regiões.

## 6 Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho apresentou-se um protótipo que demonstra qualidades de interesse para servir como base de testes para algoritmos avançados de controle. O protótipo tem construção simples e constantes de tempo que permitem a realização de trabalhos um pouco mais aprofundados mesmo em cursos de graduação. Todo o acionamento e sistema de medição podem ser facilmente replicados utilizando-se circuitos eletrônicos básicos. Foi implementado um controle por realimentação de estado estimados que inclui um integrador para assegurar um erro nulo para entradas em degrau. Para fins de síntese de controlador, o modelo utilizado para os controladores aqui empregados foi o mais simples possível: considerou-se um sistema de primeira ordem em que não há acoplamentos de uma região com as que lhe antecedem (matriz de transferência com elementos acima da diagonal nulos).

Na etapa de projeto verificou-se que um método básico de síntese via LMIs não apresentou solução estabilizante para o sistema quando se considera uma alocação de autovalores em uma região circular do plano complexo e uma matriz diagonal para o ganho integral. Assim, um procedimento de busca foi implementado de maneira a considerar essa restrição em  $K_a$ . Essa imposição pode ser de interesse em aplicações industriais por

aproveitar melhor estruturas já em funcionamento em controladores lógicos programáveis. A aplicação de técnicas de controle moderno como as utilizadas neste trabalho tornaram possível projetar um controlador multivariável robusto a ponto de controlar a planta até mesmo em pontos de operação diferentes dos utilizados na etapa de projeto. Foram mostrados resultados experimentais de controle tanto para regulação quanto para seguimento de referência.

Como trabalhos futuros pretende-se obter um modelo mais preciso do sistema, incluindo-se os efeitos de acoplamentos de uma região com as que lhe antecedem e também considerar o efeito do atraso de transporte, especialmente nos casos em que o ventilador funcionar com baixa rotação. Também pretende-se investigar outras técnicas de síntese, que sejam menos conservadoras, com as condições que utilizam variáveis de folga (advindas do uso do lema de Finsler) para construir os ganhos. Nesse caso, o foco estará no tratamento das incertezas, uma vez que os modelos aqui utilizados são uma média entre os modelos de aquecimento e resfriamento do sistema.

## 7 Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios das agências CAPES, CNPq e FAPEMIG.

## Referências

- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design*, 3rd edn, Oxford University Press.
- Chilali, M. e Gahinet, P. (1996).  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Chilali, M., Gahinet, P. e Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(12): 2257–2270.
- Doebelin, E. O. (1990). *Measurement Systems : application and design*, McGraw-Hill, Singapore. 4<sup>th</sup> edition.
- Leite, V. J. S. e Peres, P. L. D. (2005). Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters, *Vehicle System Dynamics* **43**(8): 561–579.